REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2007

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2007

Concours en Physique et Chimie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 07 Juin 2007	**Heure : 8 H 00**	**Durée : 4 H**	**Nbre pages : 06**
Barème : **Exercice : 05 pts**	**;**	**Problème : 15 pts**	

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème indépendants.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Donnée : Dans le système de coordonnées cylindriques, l'opérateur divergence s'écrit :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

Exercice : Viscosimètre à écoulement

On considère un capillaire horizontal constitué d'un cylindre de rayon R, de longueur L tel que R << L, rempli d'un liquide incompressible de masse volumique ρ, de viscosité dynamique η et soumis au champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme. La température est uniforme.

On s'intéresse à une portion de liquide contenue dans un cylindre (C) de rayon $r(r < R)$, compris entre les plans (Π_1) et (Π_2) distants de L (Figure 1). On notera P_1 et P_2 les pressions au niveau des plans (Π_1) et (Π_2) respectivement.

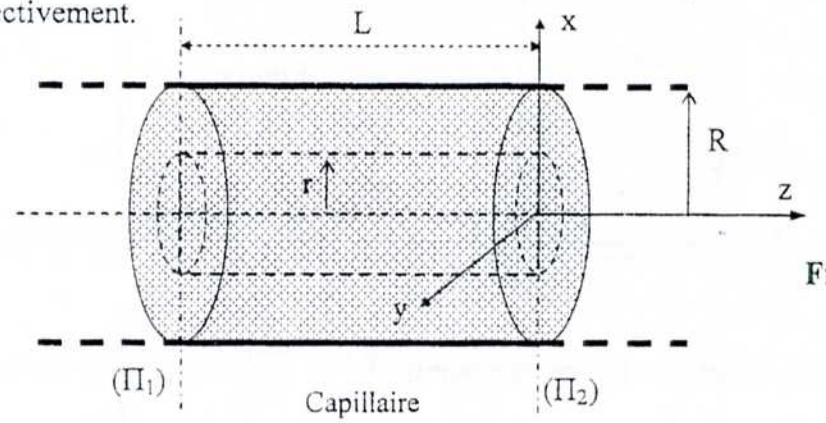

Figure 1

1- *Le fluide est au repos* :

1-1- Déterminer les forces de pression $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ qui s'exercent sur les deux sections de (C) ainsi que le poids du fluide qu'il contient.

1-2- En déduire la résultante des forces de pression $\vec{F}_{lat}$ qui s'exercent sur la surface latérale de (C).

Dans la suite, le liquide s'écoule de façon permanente longitudinalement dans le capillaire depuis (Π_1) vers (Π_2).

En utilisant le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, le champ des vitesses s'écrit sous la forme : $\vec{v}(M) = v(r,z)\vec{u}_z$.

On rappelle que sur la surface latérale S du cylindre (C) s'exerce une force de viscosité parallèle à Oz : $\vec{F}_{vis} = +\eta S \dfrac{\partial v(r,z)}{\partial r}\vec{u}_z$.

2- Faire le bilan des forces exercées sur cette portion cylindrique du liquide.

3-1- Montrer que le champ des vitesses s'écrit sous la forme : $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_z$.

3-2- En déduire une équation de la forme $\dfrac{dv}{dr} = k\,r$ où k est une constante qu'on exprimera en fonction de L, P_1, P_2, ρ et η.

3-3- Déterminer l'expression de $v(r)$ en précisant la constante d'intégration. Faire une représentation du profil de $v(r)$.

4- Déterminer le débit volumique élémentaire dQ_v du liquide s'écoulant à travers une couronne de la section du cylindre de rayon compris entre r et r + dr.

5- En déduire que le débit volumique à travers le capillaire s'écrit :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\eta}\,\frac{P_1 - P_2}{L}.$$

Indiquer le nom de la loi obtenue.

6- On considère maintenant un viscosimètre constitué du capillaire étudié précédemment communiquant avec un réservoir, de section droite circulaire et de rayon R' (Figure 2). L'ensemble est rempli du liquide dont les caractéristiques sont indiquées précédemment. Les sections (2) et (3) sont en contact avec l'air atmosphérique.

Préciser la différence de pression $P_1 - P_3$ caractérisant le viscosimètre ci-dessous en fonction des données indiquées sur la figure 2. On supposera que R' >> R de sorte que le liquide dans le réservoir puisse être considéré en équilibre hydrostatique.

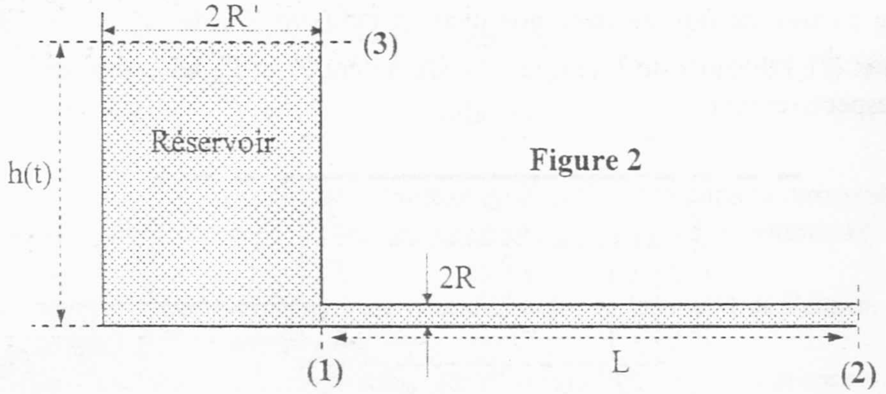

Figure 2

7- Exprimer le débit volumique Q_v en fonction de R' et $\dfrac{dh(t)}{dt}$, où $h(t)$ est la hauteur du fluide dans le réservoir à l'instant t.

8- En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.

En notant $h(t=0) = h_0$, déduire $h(t)$. On fera apparaître une grandeur τ caractéristique de l'écoulement dont on donnera l'expression. Donner son équation aux dimensions.

9- Sachant qu'il a fallu 7 minutes pour que le niveau du fluide dans le réservoir baisse de 5 cm, déterminer la viscosité cinématique ν du liquide, définie par : $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$.

On donne : $g = 9{,}81\ m/s^2$; $2R = 1\ mm$; $L = 10\ cm$; $\pi R'^2 = 4\ cm^2$; $h_0 = 10\ cm$.

Problème : Monochromateur à réseau

Dans ce problème on étudie le phénomène de diffraction qui présente de nombreuses applications. Il affecte aussi tous les instruments optiques et réduit leurs capacités. Comme exemple nous avons choisi d'étudier le principe du monochromateur à réseau.

Un monochromateur est un dispositif utilisé pour sélectionner une gamme la plus étroite possible de longueur d'onde à partir d'un faisceau lumineux de gamme de longueurs d'onde plus large. Un tel dispositif a beaucoup d'intérêt en sciences, car de nombreux phénomènes dépendent de la longueur d'onde de la lumière. Les spectromètres utilisés pour des dosages ou de l'analyse structurale constituent un exemple d'appareils basés sur les monochromateurs.

Pour séparer les différentes longueurs d'onde d'un faisceau lumineux, on utilise dans un monochromateur soit la dispersion par un prisme, soit la diffraction par un réseau. Un monochromateur comprend généralement un système mécanique permettant de diriger le faisceau de longueur d'onde choisie vers une fente de sortie.

Préliminaire :

On considère une pupille diffractante (D), contenue dans le plan Oxy, constituée d'une fente F centrée sur l'axe Oz, de largeur a suivant Ox, de longueur L >> a et de fonction de transparence t(x) (Figure 3).

Cette pupille est éclairée par une onde monochromatique de longueur d'onde λ provenant d'une fente source très fine F_1 parallèle à F et placée au foyer principal objet d'une lentille convergente (L_1) de distance focale image f_1'.

On se propose d'étudier la figure de diffraction de Fraunhofer donnée par cette pupille sur un écran qui se trouve au plan focal image d'une lentille convergente (L_2) de distance focale image f_2'.

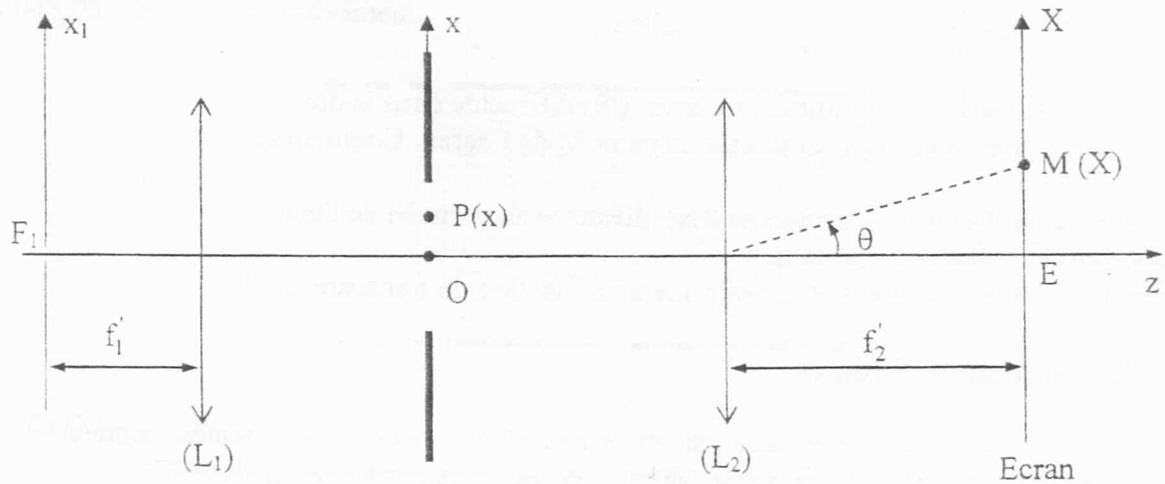

Figure 3

1- Enoncer le principe de Huygens – Fresnel.
2- En quoi consiste l'approximation de Fraunhofer ?
3- Les lentilles (L_1) et (L_2) sont utilisées dans les conditions de l'approximation de Gauss. Rappeler ces conditions.

Partie I : Fente parfaitement transparente

Dans cette partie, la fonction de transparence t(x) est donnée par :

$$t(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x| \le \frac{a}{2}$$

$$t(x) = 0 \qquad \text{ailleurs}$$

4- Tracer, jusqu'au point M de l'écran, la marche des rayons diffractés en O et en P dans la direction θ, repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}(\sin\theta, 0, \cos\theta)$.

5- Déterminer la différence de phase φ(M) entre les deux vibrations associées à ces deux rayons.

6-

6-1- Etablir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}_0(\theta)$ de la vibration lumineuse diffractée par la fente dans la direction θ.

6-2- En déduire l'expression de l'intensité lumineuse I(X) diffractée au point M de l'écran.

7-

7-1- Représenter I(X). On précisera les positions des minima et des maxima secondaires.

7-2- En déduire la largeur à la base de la tache centrale de diffraction.

7-3- Déterminer approximativement le rapport entre l'intensité du premier maximum secondaire et celle du maximum principal. Commenter.

8- On translate, dans son plan, la fente diffractante F d'une distance b suivant l'axe Ox.

8-1- Etablir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}_1(\theta)$ de la vibration lumineuse diffractée dans la direction θ.

8-2- En déduire la relation entre $\underline{A}_1(\theta)$ et $\underline{A}_0(\theta)$.

8-3- Décrire et justifier ce qu'on observe sur l'écran.

Partie II : Fente de transparence sinusoïdale

La fonction de transparence t(x) de la fente est donnée par :

$$t(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right] \quad \text{pour} \quad |x| \le \frac{a}{2} \quad ; \qquad \text{avec} \quad \ell << a$$

$$t(x) = 0 \qquad \text{ailleurs}$$

9- Etablir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}(\theta)$ diffractée dans la direction θ.

10- Représenter l'amplitude A(X) diffractée au point M de l'écran. Commenter.

11-

11-1- Déterminer l'intensité lumineuse I(X) diffractée au point M de l'écran.

11-2- Représenter I(X). Commenter.

12- En pratique, comment peut – on obtenir une telle fonction de transparence t(x) ?

Partie III : Réseau plan de N fentes

La pupille diffractante est remplacée par un réseau plan constitué de N fentes identiques parallèles, parfaitement transparentes, de même largeur a et distantes entre elles de d.

13- Exprimer la différence de phase ϕ(M) entre les deux vibrations associées aux rayons lumineux provenant des centres de deux fentes consécutives en fonction de d, X, λ et f_2'.

14-

14-1- Montrer que l'intensité lumineuse diffractée par le réseau en un point M de l'écran est donnée par :

$$I_R(M) = I_F(X)\left[\frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}\right]^2 .$$

14-2- Que représente $I_F(X)$?

15-

15-1- Quelles sont les valeurs de ϕ et de X correspondant aux maxima principaux de $I_R(M)$?

15-2- Pour quelles valeurs de ϕ et de X l'intensité $I_R(M)$ s'annule – t – elle ?

16- Représenter l'allure de $I_R(M)$ dans le cas où $\frac{d}{a} = 8$.

17- En déduire la demi- largeur à la base des pics correspondant aux maxima principaux.

18- Déterminer, pour un ordre p donné, la distance sur l'écran entre les centres des pics principaux relatifs aux radiations de longueurs d'onde λ et $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda << \lambda$).

19-

19-1- En utilisant le critère de Rayleigh, déterminer la limite de résolution $(\Delta\lambda)_r$ imposée par le réseau.

19-2- En déduire le pouvoir de résolution du réseau défini par : $\Re = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_r}$.

20- En pratique le pouvoir de résolution est influencé par la largeur s de la fente source.

20-1- Déterminer, pour une incidence quelconque, la formule fondamentale du réseau.

20-2- Exprimer la largeur s' de l'image de F_1 sur l'écran en fonction de f_1', f_2' et s.

20-3- Déterminer pour un ordre p donné, la distance séparant les centres des images de F_1 relatives aux radiations de longueur d'onde λ et $\lambda + \Delta\lambda$.

20-4- En déduire que la limite de résolution $(\Delta\lambda)_s$ imposée par la largeur de la fente source s'écrit : $(\Delta\lambda)_s = \frac{s\,d}{p\,f_1'}$.

20-5- Donner alors l'expression du pouvoir de résolution $\Re_s$ du montage.

21-

21-1- Calculer à l'ordre 1 les pouvoirs de résolution $\Re$ et $\Re_s$ dans le cas d'un réseau comportant 500 traits par millimètre gravés sur une largeur de 2 cm éclairé par une fente de largeur s = 0,1 mm émettant une radiation de longueur d'onde λ = 589 nm.

On prendra $f_1' = f_2' = 50$ cm. Commenter le résultat.

21-2- Dans ce cas, les deux radiations d'une lampe à vapeur de Sodium de longueurs d'onde respectives λ = 589 nm et λ' = 589,6 nm sont – elles séparées ? Justifier.

22- Le réseau précédent est éclairé en incidence normale avec une source lumineuse émettant dans le visible un spectre ayant des radiations de longueurs d'onde comprises dans l'intervalle λ_1 = 400 nm et λ_2 = 660 nm.

En utilisant le résultat de la question **20-1**, déterminer l'intervalle angulaire dans lequel on observe le spectre d'ordre 1.

23- Est-ce qu'il y a recouvrement entre les spectres d'ordres 1 et 2 pour cette source ? Justifier.

Partie IV : Réalisation d'un monochromateur à réseau

On modifie le montage de la figure 3 pour obtenir celui de la figure 4.

Le miroir plan orthogonal au plan de la figure est mobile autour de l'axe (Δ).

La fente source F_1, placée au plan focal objet de (L_1), est supposée infiniment fine.

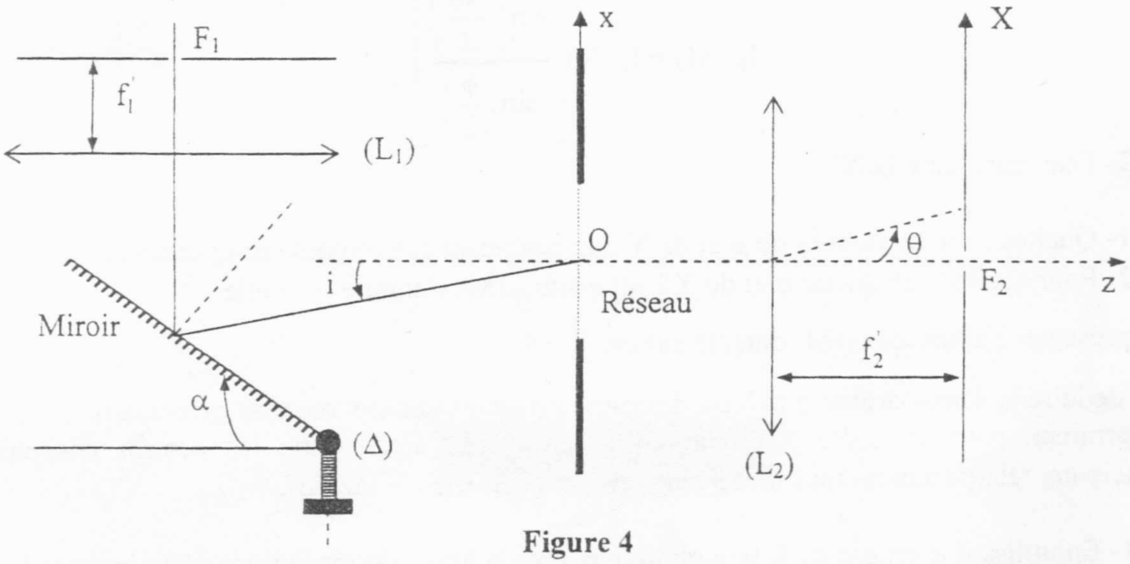

Figure 4

Le réseau comporte n = 1000 traits par millimètre gravés sur une largeur de 2 cm. Il est éclairé par une lumière de radiations comprises dans l'intervalle $\lambda_1 = 400$ nm et $\lambda_2 = 660$ nm.

La fente de sortie F_2, symétrique par rapport à Oz, est placée au plan focal image de (L_2) de distance focale $f_2' = 10$ cm.

Les angles α, i et θ sont comptés positivement dans le sens des orientations choisies.

24- Calculer le pas d de ce réseau.

25- Tracer la marche d'un faisceau lumineux sortant de (L_1).

26- Dans sa position initiale, le miroir plan est réglé de sorte que le spectre d'ordre 1 correspondant à la radiation de longueur d'onde $\lambda_0 = 500$ nm se forme au centre de F_2.

26-1- Quelle valeur i_0 doit-on donner à l'angle d'incidence i du faisceau incident sur le réseau ?

26-2- Quelle est la valeur α_0 de l'angle α correspondant à i_0 ?

27- On s'intéresse toujours au spectre d'ordre 1.

27-1- Entre quelles limites doit-on faire varier α pour pouvoir sélectionner au centre de F_2 le spectre s'étendant de λ_1 à λ_2.

27-2- De quel angle faut-il faire tourner le miroir depuis sa position initiale pour sélectionner les valeurs extrêmes λ_1 et λ_2 du spectre ?

Dans toute la suite, le miroir se trouve dans sa position initiale ($\alpha = \alpha_0$).

28- Pour des longueurs d'onde λ voisines mais différentes de λ_0, indiquer le lieu de formation du spectre d'ordre 1 correspondant. Illustrer par un schéma.

29- Soit X l'abscisse du point de convergence de la radiation de longueur d'onde λ, diffractée par le réseau dans l'ordre 1.

Donner une expression approchée de X en fonction de $\lambda_0 - \lambda$, f_2' et d.

30- La fente F_2 présente une largeur h = 0,1 mm ; elle laisse passer réellement le domaine spectral $\left[\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda_1}{2}, \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda_1}{2}\right]$.

30-1- Déterminer $\Delta\lambda_1$.

30-2- Déterminer l'intervalle $(\Delta\lambda)_r$ correspondant au pouvoir de résolution du réseau dans l'ordre 1.

30-3- Comparer $\Delta\lambda_1$ et $(\Delta\lambda)_r$.

Conclure sur la limite de résolution du monochromateur.

Fin de l'Epreuve