

**Préliminaire**

1.

$u \mapsto u^{x-1}e^{-u}$  et  $u \mapsto u^{x-1}$  sont positives sur  $]0,1[$  et  $u^{x-1}e^{-u} \leq u^{x-1}$ .

$\int_0^1 u^{x-1} du$  converge pour  $x > 0$  donc  $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u} du$  converge pour  $x > 0$ .

$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 (u^{x-1}e^{-u}) = 0$  donc il existe  $A > 0$  tel que  $0 \leq u^{x-1}e^{-u} \leq \frac{1}{u^2}$ ,  $u \geq A$ .

On en déduit que  $\int_1^{+\infty} u^{x-1}e^{-u} du$  converge.

Par conséquent  $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u} du$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

2. Pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du = \left[ -u^x e^{-u} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = x \Gamma(x)$$

**Partie 1**

Soit  $\varphi$  l'application qui à tout  $P \in F$  associe la fonction polynomiale

$$\varphi(P) : t \mapsto t \frac{d^2 P}{dt^2}(t) + (-t + \alpha + 1) \frac{dP}{dt}(t).$$

1. Pour tout  $P \in F_m$ ,  $\deg \varphi(P) \leq m$ , donc  $\varphi(P) \in F_m$ .

En utilisant la linéarité de la dérivée, on obtient

$$\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q), \text{ pour tout } P, Q \in F_m \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la restriction de  $\varphi$  à  $F_m$  est un endomorphisme que l'on notera  $\varphi_m$ .

2.  $\varphi(v_0) = 0v_0$ .

Pour  $1 \leq k \leq m$ ,  $\varphi(v_k) = -kv_k + (k^2 + \alpha k)v_{k-1}$  d'où

$$\text{mat}_B(\varphi_m) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & & & & \dots \\ \dots & 0 & & & 0 & & \dots \\ \dots & & & & k^2 + \alpha k & & \dots \\ \dots & & & & -k & & 0 \\ \dots & & & & 0 & & m^2 + \alpha m \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -m \end{pmatrix}$$

3.  $\varphi_m$  possède les  $m$  valeurs propres simples  $-k$ ,  $0 \leq k \leq m$ .

De plus  $\dim F_m = m + 1$ , il en résulte que  $\varphi_m$  est diagonalisable.

4.  $L_j^\alpha : t \mapsto \frac{1}{j!} t^{-\alpha} e^t \frac{d^j}{dt^j} (t^{\alpha+j} e^{-t})$ ,  $t > 0$ .

On déduit de la formule de Leibniz que

$$\begin{aligned} L_j^\alpha(t) &= \frac{1}{j!} e^t t^{-\alpha} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \frac{d^\ell(e^{-t})}{dt^\ell} \frac{d^{j-\ell}(t^{\alpha+j})}{dt^{j-\ell}} \\ &= \frac{1}{j!} t^{-\alpha} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} (-1)^\ell (\alpha+j) \dots (\alpha+\ell+1) t^{\alpha+\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^j \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} t^\ell. \end{aligned}$$

5. Le calcul donne

$$\begin{aligned} L_0^\alpha(t) &= 1, \quad L_1^\alpha(t) = -t + (1+\alpha), \quad L_2^\alpha(t) = \frac{t^2}{2} - (2+\alpha)t + \frac{(2+\alpha)(1+\alpha)}{2}, \\ L_3^\alpha(t) &= -\frac{t^3}{6} + (3+\alpha)\frac{t^2}{2} - \frac{(3+\alpha)(2+\alpha)}{2}t + \frac{(3+\alpha)(2+\alpha)(1+\alpha)}{6}. \end{aligned}$$

6. Soit  $m$  un entier naturel

$$a. L_j^\alpha = \sum_{\ell=0}^j \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} v_\ell.$$

$$\begin{aligned} \varphi_m(L_j^\alpha) &= \sum_{\ell=0}^j \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \varphi_m(v_\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^j \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-\ell)v_\ell + \sum_{\ell=1}^j \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (\ell^2 + \alpha\ell)v_{\ell-1} \\ &= -j \frac{(-1)^j}{j!} v_j + \sum_{\ell=0}^{j-1} \left[ \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-\ell) + \binom{j+\alpha}{j-\ell-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} ((\ell+1)^2 + \alpha(\ell+1)) \right] v_\ell. \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-\ell) + \binom{j+\alpha}{j-\ell-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} ((\ell+1)^2 + \alpha(\ell+1)) = -j \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!},$$

il vient que  $\varphi_m(L_j^\alpha) = -jL_j^\alpha$ .

b. Il découle de ce qui précède que  $L_j^\alpha$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $-j$ .

$F_m$  est somme directe de ses sous-espaces propres, c'est-à-dire  $F_m = \bigoplus_{j=0}^m \mathbb{R}L_j^\alpha$ .

## Partie 2

1. Soit  $f, g \in E$ .

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f^2(t) + g^2(t)) \text{ d'où } |f(t)g(t)|t^\alpha e^{-t} \leq \frac{1}{2}(f^2(t)t^\alpha e^{-t} + g^2(t)t^\alpha e^{-t}).$$

Les fonctions  $t \mapsto f^2(t)t^\alpha e^{-t}$  et  $t \mapsto g^2(t)t^\alpha e^{-t}$  étant intégrables sur  $[0, +\infty[$ , il en est de même pour la fonction  $t \mapsto f(t)g(t)t^\alpha e^{-t}$ .

2. Pour tout  $f, g \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la fonction

$$t \mapsto (\alpha f(t) + \beta g(t))^2 t^\alpha e^{-t} = (\alpha f(t))^2 t^\alpha e^{-t} + 2\alpha f(t)\beta g(t)t^\alpha e^{-t} + (\beta g(t))^2 t^\alpha e^{-t}$$

est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , comme somme de fonctions intégrables.

Par suite  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0([0, +\infty[)$ .

3. Il est clair que  $\langle | \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .

Soit  $f \in E$ . La fonction  $t \mapsto f^2(t)t^\alpha e^{-t}$  étant continue et positive, il vient que

$$\langle f | f \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle f | f \rangle = 0 \Leftrightarrow f^2(t)t^\alpha e^{-t} = 0, \quad t \in [0, +\infty[ \\ \Leftrightarrow f(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty[.$$

Par conséquent  $\langle | \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

4. Pour montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , il suffit de montrer que la fonction  $t \mapsto P^2(t)t^\alpha e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , pour tout  $P \in F$ .

Comme pour tout entier naturel  $k$   $\int_0^{+\infty} t^{2k} t^\alpha e^{-t} dt = \Gamma(2k + \alpha + 1)$ , la fonction  $t \mapsto t^{2k} t^\alpha e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Le résultat en découle.

5. Pour tout couple d'entiers naturels  $(j, k)$ ,

$$\langle v_j | v_k \rangle = \int_0^{+\infty} t^{k+j} t^\alpha e^{-t} dt = \Gamma(k + j + \alpha + 1).$$

### Partie 3

1. Remarquons que pour tout  $\ell \geq 1$ ,  $u(v_\ell) = -v_\ell + (\ell + \alpha)v_{\ell-1}$ .

Pour  $j = 0$ ,  $u^0(v_k) = v_k$ .

Supposons que pour tout  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $u^j(v_k) = \sum_{\ell=k-j}^k \lambda_\ell v_\ell$ .

Soit  $0 \leq j+1 \leq k-1$ ,

$$u^{j+1}(v_k) = \sum_{\ell=k-j}^k \lambda_\ell u(v_\ell) \\ = \sum_{\ell=k-j}^k \lambda_\ell (-v_\ell + (\ell + \alpha)v_{\ell-1}) \\ = \sum_{\ell=k-j}^k -\lambda_\ell v_\ell + \sum_{\ell=j-k}^j \lambda_\ell (\ell + \alpha)v_{\ell-1} \\ = \sum_{\ell=k-j}^k -\lambda_\ell v_\ell + \sum_{\ell=k-j-1}^{k-1} \lambda_{\ell+1} (\ell + 1 + \alpha)v_\ell$$

Ce qui prouve que  $u^{j+1}(v_k)$  est une combinaison linéaire de  $(v_\ell)_{k-j-1 \leq \ell \leq k}$

Comme pour tout  $k \geq 1$ ,  $0 \leq j \leq k-1$  et  $k-j \leq \ell \leq k$ ,  $v_\ell(0) = 0$ , on en déduit que

Pour tous  $k \geq 1$  et  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $u^j(v_k)(0) = 0$  ou encore  $u^j(v_k) \in G$ .

2. Pour  $k = 0$ ,  $L_0^\alpha = 1 = u^0(v_0)$ .

On suppose que pour tout  $k \geq 1$  et  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $L_k^\alpha(t) = \frac{1}{k!} e^{t-\alpha} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} (u^j(t^k) t^\alpha e^{-t})$ ,

Soit  $j+1 \leq k-1$ .

$$\begin{aligned} L_k^\alpha(t) &= \frac{1}{k!} e^{t-\alpha} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} (u^j(t^k) t^\alpha e^{-t}) \\ &= \frac{1}{k!} e^{t-\alpha} \frac{d^{k-j-1}}{dt^{k-j-1}} \left( \frac{d}{dt} (u^j(t^k) t^\alpha e^{-t}) \right) \\ &= \frac{1}{k!} e^{t-\alpha} \frac{d^{k-j-1}}{dt^{k-j-1}} (u^{j+1}(t^k) t^\alpha e^{-t}) \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout  $k \geq 1$  et  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $L_k^\alpha(t) = \frac{1}{k!} e^{t-\alpha} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} (u^j(t^k) t^\alpha e^{-t})$ .

Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$L_k^\alpha(t) = \frac{1}{k!} e^{t-\alpha} \frac{d}{dt} (u^{k-1}(t^k) t^\alpha e^{-t}) = \frac{1}{k!} e^{t-\alpha} (u^k(t^k) t^\alpha e^{-t}) = \frac{1}{k!} u^k(v_k).$$

3. Soit  $f \in F$  et  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} \langle f | u(g) \rangle &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{t-\alpha} \frac{d}{dt} (g(t) t^\alpha e^{-t}) t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \left[ f(t) g(t) t^\alpha e^{-t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) (g(t) t^\alpha e^{-t}) dt \\ &= -f(0) g(0) - \left\langle \frac{df}{dt} \middle| g \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{df}{dt} \middle| g \right\rangle. \end{aligned}$$

$$4. \text{ Pour } k=0, \langle f | L_0^\alpha \rangle = \langle f | v_0 \rangle = \left\langle \frac{d^0 f}{dt^0} \middle| v_0 \right\rangle.$$

Pour tout  $k \geq 1$  et  $1 \leq j \leq k$ ,  $u^{k-j}(v_k)(0) = 0$ , d'où

$$\langle f | L_k^\alpha \rangle = -f(0) u^{k-1}(v_k)(0) - \frac{1}{k!} \left\langle \frac{df}{dt} \middle| u^{k-1}(v_k) \right\rangle = -\frac{1}{k!} \left\langle \frac{df}{dt} \middle| u^{k-1}(v_k) \right\rangle.$$

En réitérant le même procédé jusqu'à l'ordre  $k$ , il vient que  $\langle f | L_k^\alpha \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \frac{d^k f}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle$ .

$$5. \langle v_j | L_k^\alpha \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \frac{d^k v_j}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle.$$

Pour  $k > j$ ,  $\langle v_j | L_k^\alpha \rangle = 0$ .

$$\text{Pour } k = j, \langle v_k | L_k^\alpha \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \frac{d^k v_k}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \langle k! | v_k \rangle = (-1)^k \Gamma(k + \alpha + 1).$$

$$\text{Pour } k < j, \langle v_j | L_k^\alpha \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{j!}{(j-k)!} \langle v_{j-k} | v_k \rangle = \binom{j}{k} (-1)^k \Gamma(j + \alpha + 1).$$

6. Soit  $(j, k)$  un couple d'entiers naturels distincts  $(j, k)$  tel que  $j < k$ .

$$\langle L_j^\alpha | L_k^\alpha \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \frac{d^k L_j^\alpha}{dt^k} \middle| \nu_k \right\rangle.$$

Or  $L_j^\alpha$  est un polynôme de degré  $j$ , d'où  $\frac{d^k L_j^\alpha}{dt^k} = 0$ . Par suite  $\langle L_j^\alpha | L_k^\alpha \rangle = 0$ .

$$\begin{aligned} 7. \|L_k^\alpha\|^2 &= \langle L_k^\alpha | L_k^\alpha \rangle \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \frac{d^k L_k^\alpha}{dt^k} \middle| \nu_k \right\rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle (-1)^k \frac{k!}{k!} \nu_0 \middle| \nu_k \right\rangle \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{k!}. \end{aligned}$$

8. a. Il est clair que  $\langle q_{k+1} | L_j^\alpha \rangle = \langle t L_k^\alpha | L_j^\alpha \rangle = \langle L_k^\alpha | t L_j^\alpha \rangle = \langle L_k^\alpha | q_{j+1} \rangle$ .

b. Le calcul donne  $q_1 = -L_1^\alpha + (\alpha + 1)L_0^\alpha$ .

c. Le calcul donne  $q_2 = -2L_2^\alpha + (3 + \alpha)L_1^\alpha - (1 + \alpha)L_0^\alpha$ .

9. Soit un entier  $k \geq 2$ .

a. Pour tout  $j \leq k - 2$ ,  $\langle q_{k+1} | L_j^\alpha \rangle = \langle L_k^\alpha | q_{j+1} \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \frac{d^k q_{j+1}}{dt^k} \middle| \nu_k \right\rangle$ .

Or  $\frac{d^k q_{j+1}}{dt^k} = 0$  car  $q_{j+1}$  est un polynôme de degré  $j + 1 < k$ .

On en déduit que  $\langle q_{k+1} | L_j^\alpha \rangle = 0$ , pour tout  $j \leq k - 2$ ,

b.  $(L_j^\alpha)_{0 \leq j \leq k+1}$  est une base orthogonale de  $F_{k+1}$ , il s'en suit que  $q_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j L_j^\alpha$

où  $\beta_j = \frac{\langle q_{k+1} | L_j^\alpha \rangle}{\|L_j^\alpha\|^2}$ ,  $0 \leq j \leq k + 1$ .

Rappelons que pour  $j \leq k - 2$ ,  $\langle q_{k+1} | L_j^\alpha \rangle = 0$ . Par conséquent il existe des réels

$\beta_{k+1}, \beta_k$  et  $\beta_{k-1}$  tels que  $q_{k+1} = \beta_{k+1} L_{k+1}^\alpha + \beta_k L_k^\alpha + \beta_{k-1} L_{k-1}^\alpha$ .

c. Le calcul donne

$$\langle q_{k+1} | L_{k+1}^\alpha \rangle = \frac{(-1)}{k!} \Gamma(k + \alpha + 2) = -(k + 1) \|L_{k+1}^\alpha\|^2,$$

$$\langle q_{k+1} | L_{k-1}^\alpha \rangle = \frac{-(\alpha + k)}{(k - 1)!} \Gamma(k + \alpha) = -(\alpha + k) \|L_{k-1}^\alpha\|^2.$$

d. Le calcul donne  $\langle q_{k+1} | L_k^\alpha \rangle = (2k + \alpha + 1) \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{k!} = (2k + \alpha + 1) \|L_k^\alpha\|^2$ .

e. La relation  $t L_k^\alpha(t) = -(k + 1) L_{k+1}^\alpha(t) + (2k + \alpha + 1) L_k^\alpha(t) - (k + \alpha) L_{k-1}^\alpha(t)$  découle des questions b. c. et d.

10.  $(L_j^\alpha)_{0 \leq j \leq k}$  est une base orthogonale de  $F_k$ ,

il s'en suit que  $t \frac{dL_k^\alpha}{dt}(t) = \sum_{j=0}^k \beta'_j L_j^\alpha$  où  $\beta'_j = \frac{\left\langle t \frac{dL_k^\alpha}{dt}(t) \middle| L_j^\alpha \right\rangle}{\|L_j^\alpha\|^2}$ ,  $0 \leq j \leq k$ .

Pour  $j \leq k-2$ ,  $\|L_j^\alpha\|^2 \beta'_j = \left\langle \frac{dL_k^\alpha}{dt}(t) \middle| tL_j^\alpha \right\rangle = -\left\langle L_k^\alpha \middle| u(tL_j^\alpha) \right\rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left\langle \frac{d^k u(tL_j^\alpha)}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle$ ,

Le polynôme  $u(tL_j^\alpha)$  étant de degré  $j+1 < k$ , on en déduit que  $\beta'_j = 0$ .

Le calcul donne  $\beta'_{k-1} = -(k+\alpha)$  et  $\beta'_k = k$ .

Ainsi,  $t \frac{dL_k^\alpha}{dt}(t) = kL_k^\alpha(t) - (k+\alpha)L_{k-1}^\alpha(t)$ .

11. Soit  $p$  un entier naturel.

9. a. Il est clair que  $b_0 = a_0$ .

Supposons que  $b_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m+p}{k+p} a_k$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= a_{m+1} - \sum_{k=0}^m \binom{m+1+p}{k+p} b_k \\ &= a_{m+1} - \sum_{k=0}^m \binom{m+1+p}{k+p} \sum_{\ell=0}^k (-1)^{\ell+k} \binom{k+p}{\ell+p} a_\ell \\ &= a_{m+1} - \sum_{\ell=0}^m \sum_{k=\ell}^m \binom{m+1+p}{k+p} (-1)^{\ell+k} \binom{k+p}{\ell+p} a_\ell \\ &= a_{m+1} - \sum_{\ell=0}^m \binom{m+1+p}{\ell+p} (-1)^\ell a_\ell \sum_{k=\ell}^m \binom{m+1-\ell}{k-\ell} (-1)^k \\ &= a_{m+1} - \sum_{\ell=0}^m \binom{m+1+p}{\ell+p} a_\ell \sum_{k=0}^{m-\ell} \binom{m+1-\ell}{k} (-1)^k \\ &= a_{m+1} - \sum_{\ell=0}^m \binom{m+1+p}{\ell+p} a_\ell \left[ (1-1)^{m+1-\ell} - (-1)^{m+1-\ell} \right] \\ &= a_{m+1} + \sum_{\ell=0}^m \binom{m+1+p}{\ell+p} (-1)^{m+1-\ell} a_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{m+1} \binom{m+p+1}{\ell+p} (-1)^{m+1+\ell} a_\ell. \end{aligned}$$

b. En écrivant  $L_m^p = \sum_{k=0}^m \binom{m+p}{m-k} \frac{(-1)^k}{k!} v_k = \sum_{k=0}^m \binom{m+p}{k+p} b_k$  avec  $b_k = \frac{(-1)^k}{k!} v_k$ .

On déduit de la question précédente que  $\frac{t^m}{m!} = \sum_{k=0}^m \binom{m+p}{k+p} (-1)^k L_k^p(t)$ .

## Partie 4

Soit un entier  $m \geq 1$  et  $g$  l'élément de  $F_m$  défini par

$$\begin{cases} g(t) = 1 & \text{si } L_m^\alpha \text{ ne possède pas de zéro de multiplicité impaire} \\ g(t) = (t - a_0) \dots (t - a_{s-1}) & \text{si } a_0, \dots, a_{s-1} \text{ sont les zéros de } L_m^\alpha \text{ de multiplicité impaire} \end{cases}$$

1. a. Si  $L_m^\alpha$  ne possède pas de zéro de multiplicité impaire alors  $L_m^\alpha$  garde un signe constant par conséquent  $\langle L_m^\alpha | g \rangle \neq 0$ .

Si  $a_0, \dots, a_{s-1}$  sont les zéros de  $L_m^\alpha$  de multiplicité impaire, alors  $(t - a_0) \dots (t - a_{s-1}) L_m^\alpha$  garde un signe constant par conséquent  $\langle L_m^\alpha | g \rangle \neq 0$ .

b.  $\langle L_m^\alpha | g \rangle \neq 0$  implique que  $\deg g = m$ , par conséquent  $s - 1 = m$ , donc  $L_m^\alpha$  possède  $m$

zéros distincts dans  $[0, +\infty[$ . De plus  $L_m^\alpha(0) = \binom{\alpha + m}{m} \neq 0$ , ainsi  $L_m^\alpha$  possède  $m$  zéros

distincts dans  $]0, +\infty[$ .

2. Soit  $a_0, \dots, a_{m-1}$  les zéros de  $L_m^\alpha$ .

a. Pour tout entier  $0 \leq k \leq m - 1$ , on désigne par  $\delta_k$  la forme linéaire sur  $F_{m-1}$  définie par  $\delta_k(R) = R(a_k)$ .

Pour montrer que  $(\delta_k)_{0 \leq k \leq m-1}$  forment une base du dual  $F_{m-1}^*$  de  $F_{m-1}$ , il suffit de montrer que la famille  $(\delta_k)_{0 \leq k \leq m-1}$  est libre.

Soit  $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq m-1}$  des réels tels que  $\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \delta_k = 0$ .

On pose pour tout  $0 \leq j \leq m - 1$ ,  $R_j : t \mapsto \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m-1} (t - a_k)$ , il est clair que

$R_j(a_k) = 0, k \neq j$  et  $R_j(a_j) \neq 0$ .

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \delta_k(R_j) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k R_j(a_k) = 0 \Rightarrow \alpha_j R_j(a_j) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0.$$

b. l'application  $h : g \mapsto \int_0^{+\infty} g(t) t^\alpha e^{-t} dt$  est une forme linéaire sur  $F_{m-1}$ , il existe alors un

unique  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$  tel que  $h = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \delta_k$  ou encore pour tout  $g$  de  $F_{m-1}$ ,

$$\int_0^{+\infty} g(t) t^\alpha e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \delta_k(g) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k g(a_k).$$

c. Soit une fonction polynomiale  $P$  telle que  $\deg(P) \leq 2m - 1$ . Rappelons que  $\deg(L_m^\alpha) = m$ ,

on peut écrire  $P = L_m^\alpha Q + R$  tels que  $\deg(R) \leq m - 1$ , on en déduit que  $\deg(Q) \leq m - 1$  et

que pour tout  $0 \leq k \leq m - 1$ ,  $P(a_k) = R(a_k)$ .

D'autre part,

$$\int_0^{+\infty} P(t) t^\alpha e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} L_m^\alpha(t) Q(t) t^\alpha e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} R(t) t^\alpha e^{-t} dt$$

$$= \langle L_m^\alpha | Q \rangle + \int_0^{+\infty} R(t) t^\alpha e^{-t} dt$$

Or  $\langle L_m^\alpha | Q \rangle = 0$  car  $\deg(Q) < m$ , par conséquent

$$\int_0^{+\infty} P(t) t^\alpha e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} R(t) t^\alpha e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k R(a_k) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P(a_k)$$

### Partie 5

1. Soit  $t \in ]0, 1]$ , pour tout entier  $j$ ,  $|L_j^0(t)| \leq \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \frac{t^\ell}{\ell!} \leq \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} t^\ell \leq (1+t)^j \leq 2^j$ .

Or la série entière  $\sum_{j \geq 0} 2^j x^j$  converge pour tout  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

Par conséquent la série  $\sum_{j \geq 0} L_j^0(t) x^j$  est convergente pour tout couple de réels  $(t, x)$

$$\text{de } ]0, 1] \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

Pour tout couple de réels  $(t, x)$  de  $]0, 1] \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , on pose  $f(t, x) = \sum_{j=0}^{+\infty} L_j^0(t) x^j$ .

2.  $f(t, 0) = L_0^0(t) = 1$ .

3. a. Pour tout  $t \in ]0, 1]$ , la série entière  $\sum_{j \geq 0} L_j^0(t) x^j$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  par

conséquent  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  sur

$$]0, 1] \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

D'autre part, soit  $\beta \in ]0, 1]$  et  $t \in ]\beta, 1]$

$$\left| \frac{dL_j^0}{dt}(t) \right| \leq \sum_{\ell=1}^j \binom{j}{\ell} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \leq \frac{1}{t} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} t^\ell \leq \frac{1}{\beta} (1+t)^j \leq \frac{1}{\beta} 2^j.$$

Or la série entière  $\frac{1}{\beta} \sum_{j \geq 0} 2^j x^j$  converge pour tout  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

Par conséquent  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  admet une dérivée partielle par rapport à  $t$  sur

$$]0, 1] \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

b.  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{dL_j^0}{dt}(t) x^j$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} j x^{j-1} L_j^0(t)$ .

4. a. Pour tout entier  $j$ ,



$$\begin{aligned}
(j+1)L_{j+1}^0(t) - (j+1-t)L_j^0(t) &= (j+1)L_{j+1}^0(t) - (j+1)L_j^0(t) + tL_j^0(t) \\
&= (j+1)L_{j+1}^0(t) - (j+1)L_j^0(t) - (j+1)L_{j+1}^0(t) + (2j+1)L_j^0(t) - jL_{j-1}^0(t) \\
&= j(L_j^0(t) - L_{j-1}^0(t)) = t \frac{dL_j^0}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Ainsi  $(j+1)L_{j+1}^0(t) = (j+1-t)L_j^0(t) + t \frac{dL_j^0}{dt}(t)$ .

b. Montrer que pour tout  $(t, x)$  de  $]0, 1[ \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,

$$\begin{aligned}
t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= t \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{dL_j^0}{dt}(t) x^j = \sum_{j=0}^{+\infty} x^j ((j+1)L_{j+1}^0 - (j+1)L_j^0 + tL_j^0) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} x^{j-1} (1-x) jL_j^0 + (t-1)f(t, x) \\
&= (1-x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + (t-1)f(t, x)
\end{aligned}$$

5. On pose  $f(t, x) = F\left(\frac{t}{1-x}\right)g(t)$ , où  $F$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables respectivement sur  $]0, 2[$  et  $]0, 1]$ .

a.  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{1-x} \frac{dF}{dt}\left(\frac{t}{1-x}\right)g(t) + F\left(\frac{t}{1-x}\right) \frac{dg}{dt}(t)$

et  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{t}{(1-x)^2} \frac{dF}{dx}\left(\frac{t}{1-x}\right)g(t)$ .

De la relation  $t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - (1-x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + (1-t)f(t, x) = 0$ , on déduit que

$$F\left(\frac{t}{1-x}\right) \left( t \frac{dg}{dt}(t) + (1-t)g(t) \right) = 0.$$

b. Supposons qu'il existe  $t_0$  tel que  $F\left(\frac{t_0}{1-x}\right)$  soit nul.

Il en résulte que  $f(t_0, x) = 0$  pour tout  $x$  de  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . Ce qui est impossible car  $f(t_0, 0) = 1$

On en déduit que la fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle

$$t \frac{dg}{dt}(t) + (1-t)g(t) = 0.$$

Il existe alors une constante  $C$  telle que  $g(t) = C \frac{e^t}{t}$ .

Il vient que  $f(t, x) = F\left(\frac{t}{1-x}\right) C \frac{e^t}{t}$ . Or  $f(t, 0) = 1$ , on en déduit que  $F(t) = \frac{te^{-t}}{C}$ .

D'où  $f(t, x) = \frac{t}{1-x} \frac{e^{-\frac{t}{1-x}}}{C} C \frac{e^t}{t}$  et  $\frac{e^{-\frac{t}{1-x}}}{1-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} L_j^0(t) x^j$ .