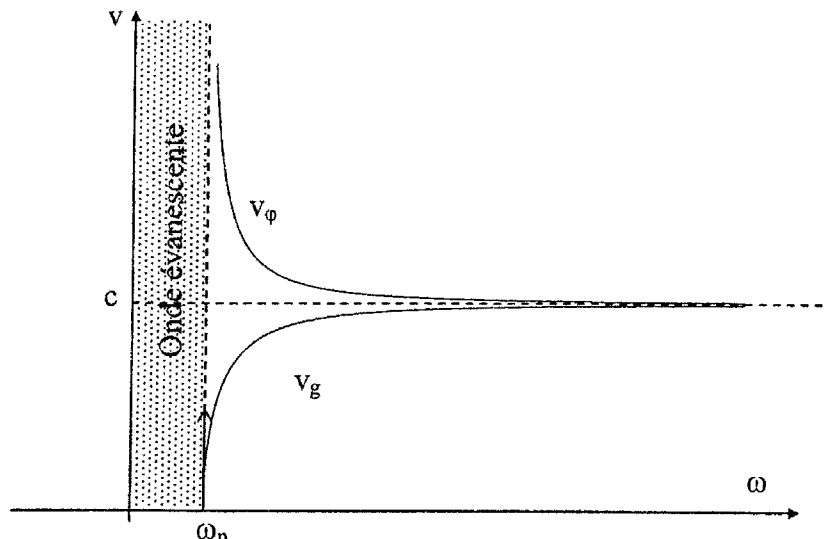


Problème 1 : (52/80)

Question	Barème
<p>1-1- Dans le milieu considéré, les équations de Maxwell s'écrivent :</p> $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \quad (M-G) ; \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (M-\Phi) ; \overline{\operatorname{rot} \vec{E}}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \quad (M-F)$ $\overline{\operatorname{rot} \vec{B}}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \quad (M-A)$	<p>4 × 0.25</p>
<p>1-2-</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$: th de Gauss • $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$: le champ magnétique est à flux conservatif • $\overline{\operatorname{rot} \vec{E}}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow e = -\frac{d\phi}{dt}$: loi de Faraday ; <p>Une variation temporelle de \vec{B} engendre un champ \vec{E} non uniforme.</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\overline{\operatorname{rot} \vec{B}}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i + i_D)$: th d'Ampère généralisé 	<p>0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5</p>
<p>2- RFD :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un électron : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$ • Un proton : $m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = +e(\vec{E} + \vec{v}_p \wedge \vec{B})$ 	<p>0.5 + 0.5</p>
<p>3- $\frac{\ \vec{E}_m\ }{\ \vec{E}_e\ } = \frac{\ \vec{v}\ B}{E} < \frac{\ \vec{v}\ }{c} \ll 1$ puisque les porteurs de charges sont non relativistes.</p>	<p>0.5</p>
<p>4-1- En régime permanent : $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = i\omega \vec{v}$, d'où :</p> $\vec{v}_e = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz) \quad ; \quad \vec{v}_p = -i \frac{e}{m_p \omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$	<p>0.5 + 0.5</p>
<p>4-2- $\vec{j} = Ne \vec{v}_p - Ne \vec{v}_e = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$, avec $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \right) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \mu}$</p>	<p>1</p>
<p>5-1- $\omega_p = 0,44.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$</p>	<p>0.5</p>
<p>5-2- $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 7 \text{ MHz}$, $\lambda_p = \frac{c}{f_p} = 42,84 \text{ m}$</p>	<p>0.5</p>
<p>5-3- $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right)$, $\frac{m_e}{m_p} = 5,45.10^{-3} \ll 1 \Rightarrow$ la contribution des ions à la densité de courant peut être négligée $\Rightarrow \vec{j} = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$, avec $\omega_p^2 \approx \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}$.</p>	<p>0.5 + 0.5</p>
<p>6- $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \gamma = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega}$.</p>	<p>0.5</p>

<p>7- $\omega \neq \omega_0$:</p> <p>7-1- Equation de conservation de charge : $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$</p> <p>$\Rightarrow \text{div} \vec{E} + i\omega \rho = 0 \Rightarrow \left(\frac{\omega_p^2}{\omega} - \omega \right) \rho = 0$, puisque $\omega \neq \omega_0$, $\rho = 0$</p>	0.75
<p>7-2- $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$; $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$; $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{B}$</p> <p>L'onde est transverse. Elle possède la structure d'une onde plane TEM.</p>	1
<p>8- démonstration : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, de même : $\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$</p>	1 + 0.5
<p>9- $\Delta \vec{E} = (-i\vec{k})^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) (i\omega)^2 \vec{E} \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$: relation de dispersion</p>	0.75
<p>10- $\vec{n}^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \vec{k}^2$</p> <p>10-1- $\vec{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$</p>	0.5
<p>10-2- • si $\omega < \omega_p$: $\vec{n} = i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ • si $\omega > \omega_p$: $\vec{n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$</p>	0.5 + 0.5
<p>11- Propagation sans atténuation si \vec{k} est réel $\Rightarrow \vec{k}^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_p$, soit $f > f_p$.</p> <p>Application : pour les liaisons satellites, il faut utiliser des ondes de fréquences $f > f_p$.</p>	0.5 0.5
<p>12- $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$; $\vec{k} = n(\omega) k_0 \vec{u}_z$; $k_0 = \frac{\omega}{c}$; $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$</p> <p>D'où $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_0 n(\omega) z) \vec{u}_x$; $\vec{B} = \frac{n(\omega)}{c} E_0 \cos(\omega t - k_0 n(\omega) z) \vec{u}_y$</p>	0.5 + 0.5
<p>13- vitesse de phase : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \Rightarrow v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$; $v_\phi = v_\phi(\omega)$: milieu dispersif ; vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c n(\omega) < c$; Pour tout $\omega > \omega_p$: $v_\phi v_g = c^2$</p>	0.5 + 0.5
<div style="text-align: center;">  </div>	0.75

<p>14- $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{n(\omega)}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_0 n(\omega) z) \vec{u}_z$; $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n(\omega) E_0^2 \vec{u}_z$</p>	0.5
<p>15- $\langle u_{em} \rangle = \langle \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$; $\langle e_c \rangle = N \langle \frac{1}{2} m_e v_e^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega_p^2}{4 \omega^2}$</p>	1 + 0.5
<p>16- $\langle u \rangle = \langle u_{em} + e_c \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$; En écrivant que : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u \rangle v_e \vec{u}_z$, on tire $v_e = c n(\omega) = v_g$: la vitesse de propagation de l'énergie s'identifie à la vitesse de groupe.</p>	0.5 + 1
<p>17- $\omega < \omega_p$: \underline{k} est imaginaire pur , $\underline{k} = ik_0 \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = ik_0 \lambda(\omega)$; $\lambda(\omega) \in \mathbb{R}_+^*$, le champ électrique de l'onde s'écrit : $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-k_0 \lambda(\omega) z) \exp(i\omega t)$: pas de propagation (onde évanescente) <i>Application</i> : propagation des ondes Radio par réflexion sur l'ionosphère</p>	0.25 0.5 0.5
<p>18- $f_{RT} = 684$ kHz, $f_p = 7$ MHz : $f_{RT} \ll f_p \Rightarrow$ les ondes émises par Radio Tunis ne peuvent se propager dans l'ionosphère. Leurs réflexions permettent d'atteindre des régions loin de Tunis.</p>	0.75
<p>19- Equation de conservation de charge : $\underline{\rho} = \frac{\underline{j}}{\omega}$. En présence de \vec{B}_0, les électrons sont soumis à la force de Lorentz $-\vec{e} \vec{v}_e \wedge B_0 \vec{u}_z$ qui engendre un mouvement dans le plan perpendiculaire à (oz) $\Rightarrow \underline{j}_z = 0 \Rightarrow \rho = 0$. L'équation de M-G, donne $E_z = 0$: \vec{E} est transverse.</p>	1
<p>20-1- RFD : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_0)$. En négligeant la force associée au champ magnétique de l'onde, on trouve : $i\omega \vec{v}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{E} - \frac{eB_0}{m_e} \vec{v}_e \wedge \vec{u}_z$, on pose $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ Le produit scalaire : $i\omega \vec{u}_z \cdot \vec{v}_e = 0$; le produit vectoriel : $i\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{u}_z \wedge \vec{E} - \omega_c \vec{v}_e$ La combinaison de ces équations donne : $\vec{v}_e = \frac{i \frac{e}{m_e}}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)} \left[\vec{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E} \right]$ La densité de courant : $\vec{j} = -Ne \vec{v}_e = -i \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)} \left[\vec{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E} \right]$, $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$, $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}$ En présence de \vec{B}_0, \vec{j} et \vec{E} ne sont plus colinéaires : le milieu devient anisotrope. On peut écrire une relation matricielle $[\vec{j}] = [\underline{\gamma}] [\vec{E}]$, où $[\underline{\gamma}]$ est la matrice conductivité du milieu.</p>	0.5 1.5 0.5 0.5

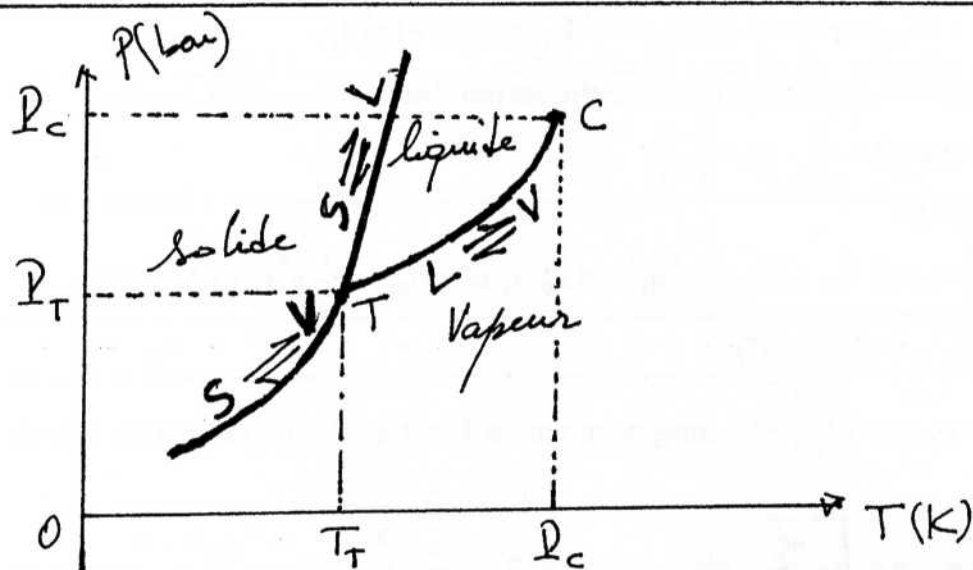
20-2- $\underline{j}_x = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_x + i \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) ; \underline{j}_y = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(-i \frac{\omega_c}{\omega} E_x + E_y \right)$	0.5 + 0.5
21- MF et MA donnent : $\underline{j} = -i \frac{\epsilon_0 c^2}{\omega} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right] \underline{\vec{E}}$	1
22-1- De ce qui précède, on déduit : $\begin{cases} \alpha \underline{E}_x - i\beta \underline{E}_y = 0 \\ i\beta \underline{E}_x + \alpha \underline{E}_y = 0 \end{cases}$ avec $\alpha = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}$ et $\beta = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{c^2 \omega}$	0.75 + 0.75
22-2- Solution non triviale si : $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, soit $\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right]^2 - \left[\frac{\omega_p^2 \omega_c}{c^2 \omega} \right]^2 = 0$: relation de dispersion	1
22-3- Solutions : $k_+^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right) ; k_-^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right)$	0.5 + 0.5
23- k_+ est réel si $\omega > \frac{1}{2} \left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$, k_- est réel si $\omega < \omega_c$ ou $\omega > \frac{1}{2} \left[\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$ k_+ et k_- sont tous les deux réels si $\omega > \frac{1}{2} \left[\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$	0.75 + 1 + 0.25
24-1- pour $k = k_+$: $\underline{E}_y = i \underline{E}_x$: la polarisation de l'onde est circulaire droite pour $k = k_-$: $\underline{E}_y = -i \underline{E}_x$: la polarisation de l'onde est circulaire gauche	0.75 + 0.75
24-2- $\underline{\vec{E}}_+ = E_{0+} (\underline{u}_x + i \underline{u}_y) \exp(i(\omega t - k_+ z)) = \underline{\vec{E}}_D ; \underline{\vec{E}}_- = E_{0-} (\underline{u}_x - i \underline{u}_y) \exp(i(\omega t - k_- z)) = \underline{\vec{E}}_G$	0.5 + 0.5
24-3- $\underline{j}_+ = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right)} \underline{\vec{E}}_+ \Rightarrow \underline{\gamma}_+ = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right)} = \gamma_D$ $\underline{j}_- = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right)} \underline{\vec{E}}_- \Rightarrow \underline{\gamma}_- = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right)} = \gamma_G$	0.75 + 0.75
24-4- $n_+ = \frac{c}{\omega} k_+ ; n_- = \frac{c}{\omega} k_- \Rightarrow n_+ = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}\right)}$ et $n_- = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right)}$	0.5 + 0.5
25-1- En $z = 0$, $\underline{\vec{E}}_i = E_0 \exp(i\omega t) \underline{u}_x = \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x + i \underline{u}_y) \exp(i\omega t) + \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x - i \underline{u}_y) \exp(i\omega t)$ Dans le plasma, ces ondes se propagent (pour ω donnée) à des vitesses différentes : En $z = \ell$, $\underline{\vec{E}}_t = \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x + i \underline{u}_y) \exp(i(\omega t - k_+ \ell)) + \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x - i \underline{u}_y) \exp(i(\omega t - k_- \ell))$, $\underline{\vec{E}}_t = E_0 \left(\cos \theta \underline{u}_x + \sin \theta \underline{u}_y \right) \exp(i(\omega t - \frac{(k_+ + k_-)}{2} \ell))$, avec $\theta = \frac{(k_+ - k_-)}{2} \ell$ La polarisation de l'onde est rectiligne parallèlement à $\underline{u}_\theta = \cos \theta \underline{u}_x + \sin \theta \underline{u}_y$.	0.5 1 0.5
25-2- $\theta = \frac{(k_+ - k_-)}{2} \ell = \frac{\omega}{2c} (n_+ - n_-) \ell$	1

25-3- En optique : « polarisation rotatoire », observable dans certains cristaux, dans certaines substances (lévogyres, dextrogyres)...	0.5
26- $\underline{\vec{B}}_i(M, t) = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - k_0 z) \underline{\vec{u}}_y,$	0.5
$\underline{\vec{B}}_r(M, t) = -\frac{E_{0r}}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \underline{\vec{u}}_y = -\frac{rE_0}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \underline{\vec{u}}_y$	0.5
$\underline{\vec{B}}_t(M, t) = \frac{n}{c} E_{0t} \exp i(\omega t - kz) \underline{\vec{u}}_y = \frac{n}{c} t E_0 \exp i(\omega t - kz) \underline{\vec{u}}_y$	0.5
27- Continuité des composantes tangentielles des champs : $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et $1 - \underline{r} = n \underline{t}$ On déduit que : $\underline{t} = \frac{2}{1+n}$; $\underline{r} = \frac{1-n}{1+n}$	0.5 + 0.5
28-1- En $z = 0$: $\langle \underline{\vec{\Pi}}_{0i} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \underline{\vec{u}}_z, \langle \underline{\vec{\Pi}}_{0r} \rangle = \frac{1}{2} r ^2 \epsilon_0 c E_0^2 \underline{\vec{u}}_z$ et $\langle \underline{\vec{\Pi}}_{0t} \rangle = \frac{1}{2} t ^2 \epsilon_0 c E_0^2 \Re(\underline{n}^*) \underline{\vec{u}}_z$	0.5 + 0.5 + 0.5
28-2- $R = r ^2, T = t ^2 \Re(\underline{n}^*)$	0.5 + 0.5
29- * $\omega < \omega_p$: $\underline{n} = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$: imaginaire pur $\Rightarrow R = 1$ et $T = 0$: réflexion totale de l'onde	0.75
* $\omega > \omega_p$: $\underline{n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$: réel positif $\Rightarrow R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$ et $T = \frac{4n}{(1+n)^2}$: une partie de l'énergie est réfléchie, l'autre est transmise. $R + T = 1$: conservation de l'énergie	0.75
30-1- Ondes stationnaires : mode fondamental : $h = \frac{c}{2\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{2h}, A.N. : \nu = 2,5 \text{ kHz}$	0.5 + 0.25
30-2- Bande AM : $f_{AM} \ll f_p$: réflexion totale sur l'ionosphère \Rightarrow possibilité de guidage entre la terre et l'ionosphère \Rightarrow ces ondes ont une longue portée.	0.5
Bande FM : $f_{FM} > f_p$: réflexion partielle sur l'ionosphère \Rightarrow perte d'énergie dans l'ionosphère \Rightarrow ces ondes ont une courte portée.	0.5

PROBLEME 2 : (28/80)

1-1. L'eau liquide, portée à la température $T = 100^\circ\text{C}$ sous la pression $P = 1 \text{ bar}$, subit une vaporisation. L'eau se trouve à l'état vapeur.

1-2-1
1-2-2

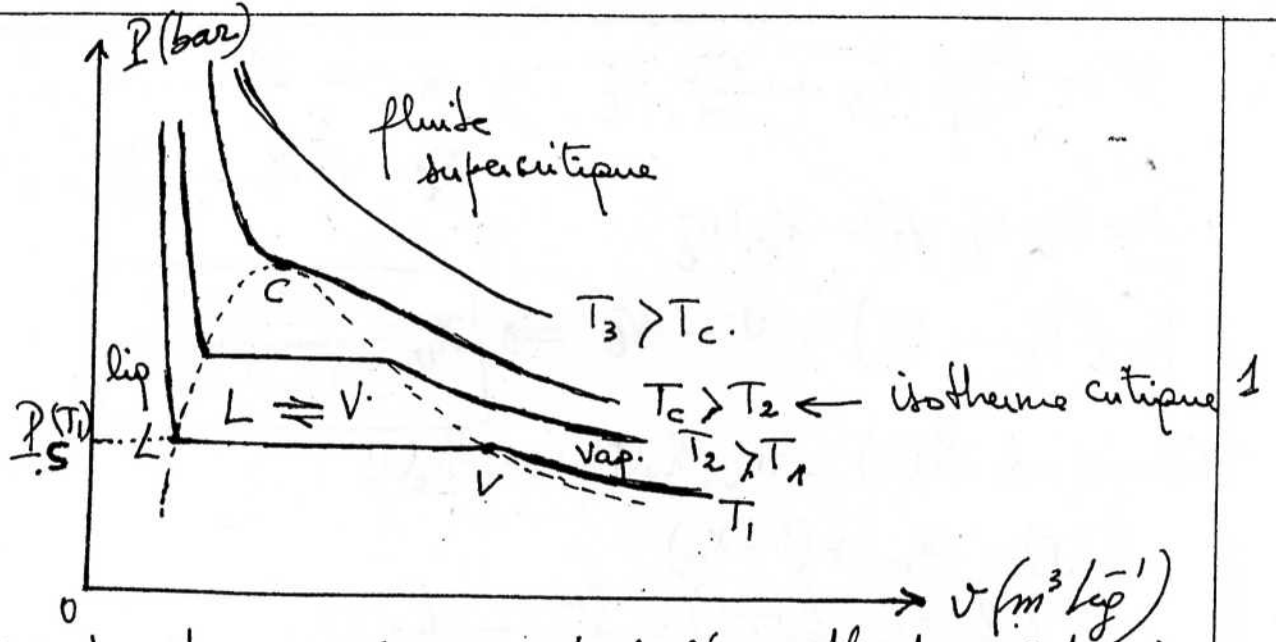


1-2-3. • Point triple: c'est une caractéristique intrinsèque d'un corps pur. En ce point le corps pur coexiste sous trois phases. 0,75

• Point critique: Propriété du corps pur. Au delà de ce point, la transition de phase liq - vapeur n'est plus observée. Les phases liquide et vapeur ne sont plus observées; il s'agit de l'état fluide. 0,75

1-2-4. Dans le diagramme (P.T) de l'eau, la pente de la courbe (droite) de l'équilibre solide-liquide est négative. Ce comportement est dû à la diminution du volume massique du corps lors de la transition (glace \rightarrow eau). ($v_l < v_s$). 1

1-3-1.



• Combe de rosée C.V. : c'est l'ensemble de points où la 1^{ère} goutte de liquide se forme à une température T .

• Combe d'ébullition : c'est l'ensemble de points où la 1^{ère} bulle de la vapeur apparaît à T .

1-3.2. Si $T < T_c$: les isothermes d'Andréas présentent des paliers traduisant l'équilibre entre les phases liquide et vapeur.

Si $T = T_c$: l'isotherme critique présente un point d'inflexion et le palier disparaît; la transition entre les phases liquide et vapeur n'est plus observée. Le fluide se trouve à l'état supercritique.

1-4 des grandeurs extensives volume et l'enthalpie du corps pur s'écrivent :

$$V = V_v + V_l \quad (1) \quad \text{et} \quad H = H_v + H_l \quad (2)$$

$$V = m v ; V_v = m_v v_v ; V_l = m_l v_l .$$

$$(1) \Rightarrow m v = m_v v_v + m_l v_l$$

$$v = \frac{m_v}{m} v_v + \frac{m_l}{m} v_l \quad ; \quad x_v = \frac{m_v}{m}$$

$$x_l = 1 - x_v = \frac{m_l}{m}$$

$$v = x_v v_v + (1 - x_v) v_l$$

$$x_v (v_v - v_l) = v - v_l \Rightarrow x_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}$$

0,75

$$\textcircled{2} \Rightarrow m h(T) = m_v h_v(T) + m_l h_l(T)$$

$$h(T) = x_v h_v(T) + (1 - x_v) h_l(T)$$

$$x_v (h_v(T) - h_l(T)) = h(T) - h_l(T)$$

$$\Rightarrow x_v = \frac{h(T) - h_l(T)}{h_v(T) - h_l(T)}$$

0,75

1-5 $L_{vap}(T) = h_v(T) - h_l(T)$

1

2-1- $s(x_v, T) = c_l \ln T + \frac{x_v}{T} L_v(T) + s_0$

la variation de l'entropie est due à l'échauffement du liquide et au changement de phase.

A. l'intérieur du cylindre adiabatique, l'eau liquide subit une vaporisation. Le système est constitué de deux phases (lip - vap) en équilibre. La quasi-totalité du volume V_1 est occupé par la vapeur qui se comporte comme un gaz parfait.

1,5

$$V_1 = V_v + V_l \approx V_v$$

$$P_s V_1 = \frac{m_v}{M} R T \Rightarrow m_v = \frac{M P_s V}{R T}$$

pour $T = 373K \rightarrow P_s = 1,013 \cdot 10^5 Pa$

A.N $m_v = \frac{18 \cdot 10^{-3} \times 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1,013 \cdot 10^5}{8,314 \cdot 373} = 0,00588 kg = 5,88g$

$$x_v = \frac{m_v}{m} = \frac{5,88}{10} = 0,588 = 58,8\%$$

2-2. Détente a diabotique réversible \Rightarrow isentropique

$$s(x_v, T) = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow c_p \ln T_1 + \frac{x_{v1}}{T_1} L_v(T_1) = c_p \ln T_2 + \frac{x_{v2}}{T_2} L_v(T_2)$$

$$L_v(T_1) = h_v(T_1) - h_l(T_1) \quad ; \quad T_1 = 373 \text{ K}$$

$$L_v(T_2) = h_v(T_2) - h_l(T_2) \quad T_2 = 323 \text{ K.}$$

$$\frac{x_{v2}}{T_2} L_v(T_2) = \frac{x_{v1}}{T_1} L_v(T_1) + c_p \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{v2} = x_{v1} \frac{T_2}{T_1} \frac{L_v(T_1)}{L_v(T_2)} + c_p \frac{T_2}{L_v(T_2)} \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$$

$$L_v(T_1) = 2671,44 - 418,42 = 2253,02 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$L_v(T_2) = 2587,42 - 208,96 = 2378,46 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$\text{A.N. : } x_{v2} = 0,564 = 56,4 \%$$

1,5

0,5

3-1. Pour un système fermé S_f ; Σ : système ouvert.

$$dm_1 + M \Sigma(t) = dm_2 + M \Sigma(t+dt)$$

dm_1 : masse qui rentre dans Σ pendant dt

dm_2 " " sort de Σ " "

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé.

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dm_2}{dt} u_2 - \frac{dm_1}{dt} u_1$$

on a négligé les variations des énergies cinétique et potentielle de pesanteur.

$$\text{écoulement permanent} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

$$\delta W = \delta W_{\text{utile}} + \delta W_{\text{pression}}$$

$$\delta W_{\text{pression}} = P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = P_1 v_1 dm_1 - P_2 v_2 dm_2$$

écoulement permanent $\Rightarrow dm_1 = dm_2 = dm$.

$$dm(u_2 - u_1) + (P_2 v_2 - P_1 v_1) dm = \delta W_u + \delta Q$$

$$u_2 - u_1 = \Delta u ; P_2 v_2 - P_1 v_1 = \Delta(Pv)$$

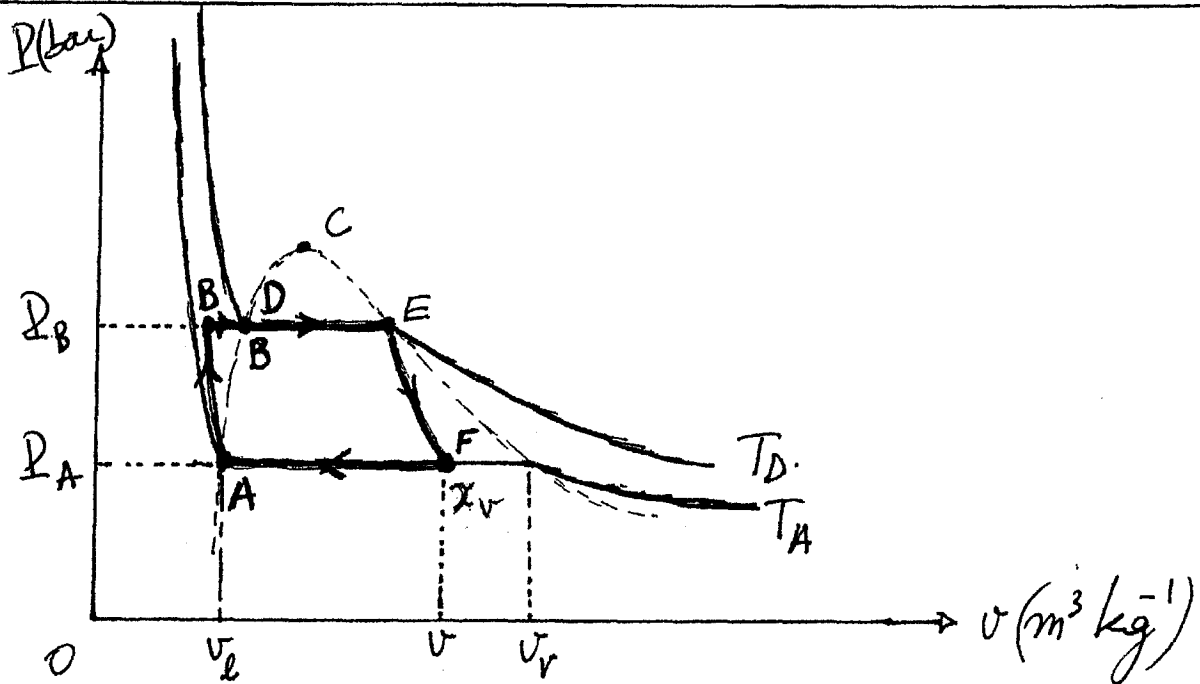
$$H = U + \Delta(Pv) \Rightarrow h = u + \Delta(Pv)$$

$$w_u = \frac{\delta W_u}{dm} ; q = \frac{\delta Q}{dm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = q + w_u}$$

1,5

3-2.



2

3-3.

Dans la pompe d'alimentation, l'évolution entre A et B est une compression adiabatique réversible donc isentropique : $ds = 0$.

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - \alpha v_l dp = 0$$

$$C_p \frac{dT}{T} = \alpha v_l dp \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\alpha v_l}{C_p} dp$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{T_B}{T_A} = \int_{P_A}^{P_B} \frac{\alpha v_l}{c_l} dp = \frac{\alpha}{c_l} v_l (P_B - P_A)$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \exp \left(\frac{\alpha}{c_l} v_l (P_B - P_A) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_B = T_A \exp \left(\frac{\alpha}{c_l} v_l (P_B - P_A) \right)}$$

$$P_A = 0,056 \text{ } 10^5 \text{ Pa} \longrightarrow T_A = 308 \text{ K}$$

$$P_B = 69,2 \text{ } 10^5 \text{ Pa} \longrightarrow T_B = ?$$

$$\text{A.N: } T_B = 308 \exp \left(\frac{115 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} (69,2 - 0,056) \cdot 10^5}{4,18 \cdot 10^3} \right)$$

$$= 308 \exp (2,48 \cdot 10^{-4}) = 308,08 \text{ K}$$

$$\Delta T = T_B - T_A = 0,08 \text{ K} \ll T_A = 308 \text{ K}$$

à l'état liquide, l'eau subit une faible élévation de température lors d'une forte compression.

3-4. Dans la turbine (évolution E \rightarrow F), la vapeur d'eau saturante subit une détente adiabatique réversible : isentropique ($s = \text{cte}$)

\Rightarrow le fluide est à l'état diphasé (lip-vap)

$$c_l \ln T_E + L_v(T_E) \cdot \frac{1}{T_E} = c_l \ln T_F + L_v(T_F) \cdot \frac{x_{vF}}{T_E}$$

$$T_E = T_D \text{ et } T_F = T_A$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{vF} = \frac{T_A}{L_v(T_A)} c_l \ln \left(\frac{T_D}{T_A} \right) + \frac{L_v(T_D)}{L_v(T_A)} \cdot \frac{T_A}{T_D}}$$

1

$$x_{VF} = \frac{T_A}{h_v(T_A) - h_l(T_A)} c_l \ln\left(\frac{T_D}{T_A}\right) + \frac{h_v(T_D) - h_l(T_D)}{h_v(T_A) - h_l(T_A)} \frac{T_A}{T_D}$$

$$h_v(T_A) - h_l(T_A) = 2560,67 - 146,34 = 2414,33 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$h_v(T_D) - h_l(T_D) = 2768,83 - 1261,11 = 1507,72 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$T_A = 303 \text{ K} ; T_D = 558 \text{ K} \text{ et } c_l = 4,18 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\implies \underline{x_{VF} = 0,662 = 66,2 \%}$$

l'enthalpie massique de l'eau à l'état F est:

$$h_F = x_{VF} h_v(T_A) + (1 - x_{VF}) h_l(T_A)$$

$$= 0,662 \times 2560,67 + 0,338 \times 146,34$$

$$= 1744,63 \text{ kJ kg}^{-1}$$

3-5.

q_1 : Transfert thermique échangé par la machine à vapeur par l'intermédiaire du Condenseur par unité de masse.

Transition $F \rightarrow A$: il s'agit d'une liquéfaction

$$q_1 = \Delta h = h_A - h_F ; \text{ avec } h_A = h_l(T_A)$$

$$q_1 = 146,34 - 1744,63 = -1598,28 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$\text{ou } q_1 = h_l(T_A) - (x_{VF} h_v(T_A) + (1 - x_{VF}) h_l(T_A))$$

$$= x_{VF} (h_l(T_A) - h_v(T_A)) = -x_{VF} L_v(T_A)$$

$$= -0,662 \times 2414,33 = -1598,29 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$q_2 = ?$ Travail thermique cédé par le centrale au circuit secondaire par unité de masse
 Dans le générateur de vapeur, on peut décomposer la transformation en un échauffement isobare puis une vaporisation isobare et isotherme.

$$q_2 = \Delta h_{BE} = h_E - h_B = h_D - h_B + h_E - h_D$$

Pour l'échauffement isobare $dh = T ds = T c_p \frac{dT}{T}$

$$\Rightarrow dh = c_p dT$$

$$\Leftrightarrow \Delta h_{BD} = c_p (T_D - T_B) \quad ; \quad T_B \approx T_A$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta h_{BD} = c_p (T_D - T_A)}$$

• Pour la vaporisation

$$\Delta h_{DE} = h_E - h_D = h_v(T_D) - h_l(T_D)$$

$$\Rightarrow q_2 = \Delta h_{BD} + \Delta h_{DE}$$

$$= c_p (T_D - T_A) + h_v(T_D) - h_l(T_D)$$

A.N : $q_2 = 4,18(558 - 308) + 2768,83 - 1261,11$
 $= 2552,72 \text{ kJ kg}^{-1}$

1,5

3-6. $\Delta h_{\text{cycle}} = q_1 + q_2 + w_u = 0$

Par application du 1^{er} principe de la thermodynamique pour un système ouvert.

$$\Rightarrow w_u = -(q_1 + q_2)$$

$$A.N: w_u = -(-1598,29 + 2552,72) = -954,43 \text{ kJ kg}^{-1}$$

w_u constitue la somme algébrique du travail cédé par la turbine à l'extérieur et le travail consommé par la pompe lors de la compression.

1,5

3-7.

$$\rho = \frac{\text{Grandeur réalisable}}{\text{Grandeur dépensée}} = \frac{-w_u}{q_2}$$

$$A.N: \rho = \frac{954,43}{2552,72} = 0,374 = 37,4\%$$

1