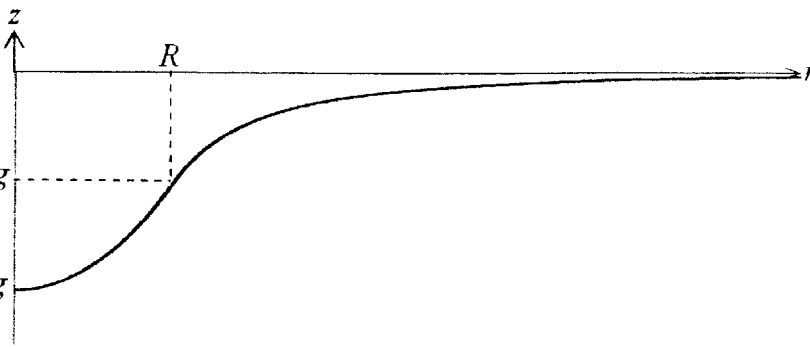


**Problème I (45/100)**  
**TOURBILLONS DANS UN FLUIDE PARFAIT**

**I- Etude d'un tourbillon**

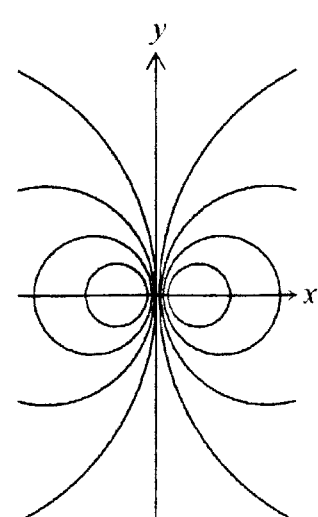
Q	Réponse	Barème
1-a)	$\text{rot}\vec{v} = 2\vec{\Omega}$ et $\text{div}\vec{v} = 0$ (puisque l'écoulement est incompressible)	0,5
	Equations vérifiées par le champ de magnétostatique : $\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et $\text{div}\vec{B} = 0$ Il y a une analogie formelle entre $\vec{v} \leftrightarrow \vec{B}$ et $2\vec{\Omega} \leftrightarrow \mu_0 \vec{j}$	0,5
1-b)	L'analogue au modèle de tourbillon en magnétostatique est un fil infini de rayon $R$ et parcouru par un courant uniforme de densité $\vec{j}$ .	0,5
	Par analogie formelle $\vec{v}$ a les mêmes propriétés de symétrie que $\vec{B}$ , celui-ci étant un pseudo-vecteur. $\vec{\Omega} = C^{te}$ et le cylindre est infini donc la « distribution » est invariante par translation le long de $(Oz)$ et par rotation autour de $(Oz)$ donc $\vec{v}$ ne dépend que de $r$ .	0,5
	Soit un point $M$ quelconque de l'espace, le plan $(M, (Oz)) \equiv (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la « distribution » donc $\vec{v} \perp (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ $\Rightarrow \vec{v}(M) = v(r) \vec{u}_\theta$	0,5
2-	L'analogue du théorème d'Ampère est : $\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(\Gamma)} 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$	0,5
	On choisit comme contour fermé et orienté $\Gamma$ un cercle de rayon $r$ centré sur $(Oz)$ $\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} v(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = r v(r) 2\pi$	
	$r < R$ $\iint_{S(\Gamma)} 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2\Omega \pi r^2 \Rightarrow \vec{v}(r < R) = \Omega r \vec{u}_\theta$	1
	$r > R$ $\iint_{S(\Gamma)} 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2\Omega \pi R^2 \Rightarrow \vec{v}(r > R) = \Omega R^2 \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$	1
		1
	$v_{\max} = v(r=R) = \Omega R$	0,5



4-a)	<p>L'altitude de la surface libre est supposée nulle lorsque <math>r</math> tend vers l'infini donc la condition <math>p_0 = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow 0}} p(r, z)</math> est vérifiée.</p> <p>• Pour <math>r &gt; R</math> on a <math>p_0 - \rho g z - \frac{\Omega^2 \rho R^4}{2} \frac{1}{r^2} = p_0 \Rightarrow z = -\frac{\Omega^2 R^4}{2g} \frac{1}{r^2}</math></p>	1
	<p>• Pour <math>r &lt; R</math> on a <math>p_0 - \rho g z + \frac{\Omega^2 \rho}{2} (r^2 - 2R^2) = p_0 \Rightarrow z = \frac{\Omega^2}{2g} (r^2 - 2R^2)</math></p>	1
4-b)		1
5-a)	<p><math>v_{\max} = \Omega R = 0,83 \cdot 50 = 41,5 \text{ m s}^{-1} \ll c = 340 \text{ m s}^{-1}</math> donc on peut considérer que l'écoulement de l'air est incompressible.</p>	1,5
5-b)	<p><math>\Delta p = p_0 - p_m = p_0 - p(r=0, z=0) = \Omega^2 \rho R^2 = (0,83)^2 \cdot 1,3 \cdot (50)^2 = 0,022 \cdot 10^5 \text{ Pa} &gt; 0</math></p> <p>On a une dépression en effet plus la vitesse à l'intérieur du tourbillon est grande plus la différence de pression entre la tornade et l'extérieur est grande ce qui entraîne un effet de succion.</p>	1 1
6-a)	<p><math>\text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow</math> il existe un champ vectoriel <math>\vec{A} / \vec{v} = \text{rot} \vec{A}</math> en effet <math>\forall \vec{F}</math> on a <math>\text{div} \text{rot} \vec{F} = 0</math></p> <p>Soit un autre potentiel vecteur <math>\vec{A}' / \vec{v} = \text{rot} \vec{A}' \Rightarrow \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \vec{A}' \Rightarrow \text{rot} (\vec{A}' - \vec{A}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \psi</math> puisque <math>\forall f</math> on a <math>\text{rot} \text{grad} f = \vec{0}</math>. <math>\vec{A}</math> est non unique, il est déterminé à un gradient près.</p> <p>En magnétostatique l'équation <math>\text{div} \vec{A} = 0</math> s'appelle la jauge de Coulomb.</p>	1 1 0,5
6-b)	<p><math>\left. \begin{aligned} \text{rot} \text{rot} \vec{A} &amp;= \text{rot} \vec{v} = 2\vec{\Omega} \\ \text{rot} \text{rot} \vec{A} &amp;= \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \vec{A} + 2\vec{\Omega} = \vec{0}</math></p> <p>L'équation analogue en magnétostatique est <math>\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}</math></p> <p>Equation de Poisson</p>	1 0,5 0,5
6-c)	<p>Par invariance (comme <math>\vec{v}</math>) <math>\vec{A}</math> ne dépend que de <math>r</math></p> <p><math>\vec{v} = \text{rot} \vec{A} \Rightarrow \vec{A}</math> a des propriétés de symétrie plane inverse à celle de <math>\vec{v}</math></p> <p>Soit un point M quelconque de l'espace, le plan <math>(M, \perp (Oz)) \equiv (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)</math> est un plan d'antisymétrie donc <math>\vec{A} \perp (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)</math></p> <p><math>\Rightarrow \vec{A}(M) = A(r) \vec{u}_z</math></p>	1
6-d)	<p>Une ligne de courant est définie par</p> <p><math>\left. \begin{aligned} \vec{v} \wedge d\vec{\ell} &amp;= \vec{0} \Rightarrow v(r) \vec{u}_\theta \wedge (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) = -v(r) dr \vec{u}_z = \vec{0} \\ \vec{v} &amp;= \text{rot} \vec{A} = \text{rot} (A(r) \vec{u}_z) = -\frac{dA}{dr} \vec{u}_\theta \Rightarrow v(r) = -\frac{dA}{dr} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dA = 0 \Rightarrow A(r) = C^{te}</math></p>	1

6-e)	Pour $r > R$ on a $dA = -v(r) dr = -\Omega R^2 \frac{dr}{r} \Rightarrow A(r) = -\Omega R^2 Lnr + K$ $A(r) = -\frac{I}{2\pi} Lnr + K \Rightarrow I = 2\pi\Omega R^2$	1,5
------	--	-----

## II- Interaction entre deux tourbillons

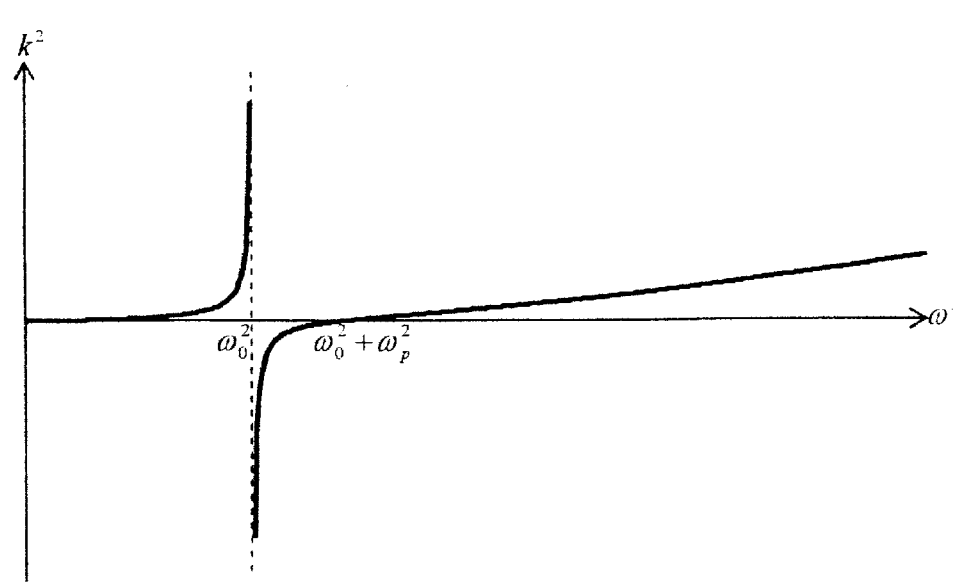
Q	Réponse	Barème
7-	$A_1(r_1) = -\frac{I_1}{2\pi} Lnr_1 + K_1 = -\frac{I}{2\pi} Lnr_1 + K_1$ $A_2(r_2) = -\frac{I_2}{2\pi} Lnr_2 + K_2 = \frac{I}{2\pi} Lnr_2 + K_2$	0,5 0,5
8-	$A(r_1, r_2) = A_1(r_1) + A_2(r_2) = \frac{I}{2\pi} Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K'$ $r_1^2 = (x-d)^2 + y^2$ et $r_2^2 = (x+d)^2 + y^2$ $A(x, y) = \frac{I}{4\pi} Ln\left(\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}\right) + K'$	0,5 1,5
9-	<p>Sur une ligne de courant on a :</p> $A = C^{te} \Rightarrow \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = C > 0 \Rightarrow (x+d)^2 + y^2 = C(x-d)^2 + C y^2 \Rightarrow$ $y^2(C-1) + x^2(C-1) - 2dx(C+1) + d^2(C-1) = 0 \Rightarrow y^2 + x^2 - 2dx \frac{C+1}{C-1} + d^2 = 0 \Rightarrow$ $y^2 + \left(x - d \frac{C+1}{C-1}\right)^2 - d^2 \left(\frac{C+1}{C-1}\right)^2 + d^2 = 0 \Rightarrow y^2 + \left(x - d \frac{C+1}{C-1}\right)^2 = \frac{4Cd^2}{(C-1)^2} > 0 \text{ car } C > 0$ <p>Les lignes de courants sont des cercles de centre <math>\left(d \frac{C+1}{C-1}, 0\right) \in</math> à l'axe (O,x) et de rayon <math>\frac{2d\sqrt{C}}{ C-1 }</math></p>	1 1 1
		2

10-	$\vec{v} = \overline{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge A(x, y) \vec{u}_z = -\frac{\partial A}{\partial x} \vec{u}_y + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{u}_x \text{ avec}$ $A(x, y) = \frac{I}{4\pi} \left[ \text{Ln}((x+d)^2 + y^2) - \text{Ln}((x-d)^2 + y^2) \right] + K'$ $\vec{v} = -\frac{I}{4\pi} \left[ \frac{2(x+d)}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{2(x-d)}{(x-d)^2 + y^2} \right] \vec{u}_y + \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{2y}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{2y}{(x-d)^2 + y^2} \right] \vec{u}_x$	1
	$\vec{v}(x=0) = -\frac{I}{4\pi} \left[ \frac{2d}{d^2 + y^2} + \frac{2d}{d^2 + y^2} \right] \vec{u}_y + \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{2y}{d^2 + y^2} - \frac{2y}{d^2 + y^2} \right] \vec{u}_x = -\frac{I d}{\pi (d^2 + y^2)} \vec{u}_y$	0,5
11-a)	<p>L'écoulement produit, dans le demi-espace <math>x &gt; 0</math>, par le tourbillon 1 et son image hydrodynamique (tourbillon 2), est identique à celui engendré par le tourbillon 1 en présence du mur solide dans le plan <math>x = 0</math>. En effet la ligne <math>x = 0</math> sépare l'écoulement précédent en deux régions indépendantes donc on peut placer une paroi solide dans le plan <math>x = 0</math> sans modifier le champ de vitesse dans le demi-espace <math>x &gt; 0</math> ni les conditions aux limites en effet <math>\vec{v}(x=0)</math> est tangent au plan donc la continuité de la composante normale de <math>\vec{v}</math> en <math>x=0</math> est vérifiée.</p>	1,5
11-b)	<p>Appliquons la relation de Bernoulli pour deux points situés à la même altitude, l'un est situé à l'infini tel que <math>(p_\infty = p_0, \vec{v}_\infty = \vec{0})</math> et l'autre appartenant au plan <math>x = 0</math> tel que <math>(p(x=0), \vec{v}(x=0))</math> :</p> $\frac{p_0}{\rho} = \frac{p(x=0)}{\rho} + \frac{I^2 d^2}{2\pi^2 (d^2 + y^2)^2} \Rightarrow p(x=0) = p_0 - \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2 (d^2 + y^2)^2}$	2
11-c)	$\vec{F} = \iint [p_0 - p(x=0)] dy dz \vec{u}_x = \int_0^1 dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2 (d^2 + y^2)^2} dy \vec{u}_x, \text{ on pose } u = \frac{y}{d}$ $\vec{F} = \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{d^4 \left(1 + \frac{y^2}{d^2}\right)^2} \vec{u}_x = \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2 d^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} \vec{u}_x = \frac{\rho I^2}{4\pi d} \vec{u}_x$	2
	<p>Le mur est attiré vers le tourbillon et ceci d'autant plus qu'ils sont proches l'un de l'autre et que l'intensité du tourbillon est grande.</p>	1

**Problème II (60/100)**  
**CARACTERISATION OPTIQUE D'UN OTC :**  
**OXYDE TRANSPARENT CONDUCTEUR**

**I- Propagation d'une onde électromagnétique dans un OTC**

<b>1-</b>	$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_t &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{E}_t &= \frac{\partial E_t}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = 0$	<b>0,5</b>
<b>2-a)</b>	$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = -e \vec{E}_t - e \vec{v} \wedge \vec{B}_t$	<b>0,5</b>
	$\left. \begin{aligned} \frac{\ \vec{F}_m\ }{\ \vec{F}_e\ } \approx \frac{v \ \vec{B}\ }{v_\phi \ \vec{E}\ } = \frac{v}{v_\phi} \\ \ \vec{S}\  \ll \lambda \Rightarrow v \ll v_\phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ \vec{F}_m\  \ll \ \vec{F}_e\ $	<b>0,5</b>
<b>2-b)</b>	$\ \vec{S}\  \ll \lambda : \text{c'est l'approximation des régimes quasi-stationnaire c.à.d. on néglige le retard dû à la propagation d'où } \vec{E}_t \text{ est uniforme à l'échelle du déplacement de l'électron.}$	<b>0,5</b>
<b>3-a)</b>	$m \frac{d^2 \vec{S}}{dt^2} = -m \omega_0^2 \vec{S} - e \vec{E}_t$	<b>0,5</b>
<b>3-b)</b>	<p>En régime sinusoïdal forcé et en notation complexe on a :</p> $-m \omega^2 \vec{S} + m \omega_0^2 \vec{S} = -e \vec{E}_t \Rightarrow \vec{S} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t$ $\left. \begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{-i \omega e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t \\ \vec{j} = -N e \vec{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{j} = i \frac{N e^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t = i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t \text{ avec } \omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}$	<b>2</b>
<b>4-</b>	$\operatorname{div} \vec{E}_t = 0, \operatorname{div} \vec{B}_t = 0, \overline{\operatorname{rot}} \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} \text{ et } \overline{\operatorname{rot}} \vec{B}_t = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$	<b>1</b>
	$\left. \begin{aligned} \overline{\operatorname{rot}} \overline{\operatorname{rot}} \vec{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t} \overline{\operatorname{rot}} \vec{B}_t = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} = -i \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} \\ \overline{\operatorname{rot}} \overline{\operatorname{rot}} \vec{E}_t = \overline{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t = -\Delta \vec{E}_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	<b>1,5</b>
	$\Delta \vec{E}_t - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} = i \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$	<b>1,5</b>
	<p>Cette équation n'est pas vérifiée par le champ électrique en notation réelle car</p> $\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} \neq \vec{E}_t$	<b>1</b>
<b>5-a)</b>	$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\omega_p^2 \omega^2}{c^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$	<b>2</b>

5-b)	 <p>The graph shows the relationship between the wave vector squared (<math>k^2</math>) and the angular frequency squared (<math>\omega^2</math>). The vertical axis is <math>k^2</math> and the horizontal axis is <math>\omega^2</math>. A vertical dashed line represents a pole at <math>\omega_0^2</math>. The curve has two branches: one for <math>\omega^2 &lt; \omega_0^2</math> that approaches <math>-\infty</math> as <math>\omega^2 \rightarrow \omega_0^2</math>, and another for <math>\omega^2 &gt; \omega_0^2 + \omega_p^2</math> that starts from <math>-\infty</math> at <math>\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2</math> and increases towards <math>+\infty</math>. There is a horizontal asymptote at <math>k^2 = 0</math>.</p>	2
5-c)	Si $\omega < \omega_0 \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k$ est réel : l'onde qui se propage dans l'OTC est une OPPM.	1,5
	Si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow k^2 < 0 \Rightarrow k$ est imaginaire : pas de propagation dans le milieu OTC l'onde est évanescente	1,5
	Si $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k$ est réel : l'onde qui se propage dans l'OTC est une OPPM.	1,5
6-	$\langle P_j \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E}_t \rangle = \frac{1}{2} \text{Reel} \left( i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^* \right) = \frac{1}{2} \text{Reel} \left( i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}  \vec{E}_t ^2 \right) = 0$	1
	Le milieu OTC est non absorbant	1
7-	Si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ l'onde ne se propage pas dans l'OTC donc elle est totalement réfléchie	1
8-a)	<p>Le milieu est transparent lorsque <math>k</math> est réel donc <math>k^2 &gt; 0 \Rightarrow</math></p> $k = \frac{\omega}{c} \left( \frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^{1/2} \left. \vphantom{k} \right\} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$ <p><math>k = n \frac{\omega}{c}</math></p>	1
8-b)	Si $\omega < \omega_0 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 > 0 \Rightarrow \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} > 1 \Rightarrow n > 1$	1,5
	Si $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 < -\omega_p^2 < 0 \Rightarrow \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} < 0 \Rightarrow 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} < 1 \Rightarrow n < 1$	1,5
8-c)	D'après la loi de Descartes de la réfraction : $\sin i = n \sin r$	1
	Si $\omega < \omega_0 \Rightarrow n > 1 \Rightarrow \sin i > \sin r \Rightarrow i > r \Rightarrow \forall i$ il y a propagation à l'intérieur de l'OTC	1
	Si $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow n < 1 \Rightarrow \sin i < \sin r \Rightarrow i < r \Rightarrow$	1,5
	Si $i < i_c = \arcsin(n)$ : il y a propagation à l'intérieur de l'OTC	1,5
	Si $i > i_c = \arcsin(n)$ : pas de propagation à l'intérieur de l'OTC donc il y a réflexion totale	1,5

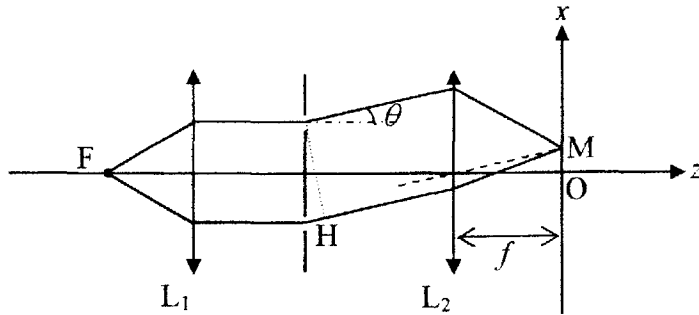
## II- Réflexion et transmission sur l'OTC

9-	$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_y ; \quad \underline{\vec{B}}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = -\frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_y$ $\underline{\vec{B}}_t = n \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_t}{c} = n \frac{E_{0t}}{c} e^{i(\omega t - k z)} \vec{u}_y$	1,5
10-a)	$\vec{E}_t(z=0, t) - (\vec{E}_i(z=0, t) + \vec{E}_r(z=0, t)) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ $\vec{B}_t(z=0, t) - (\vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t)) = 0$	0,5 0,5
10-b)	<p>Projection de la première relation sur <math>\vec{u}_x</math> : <math>\underline{E}_{0t} = E_{0i} + E_{0r} \Rightarrow \underline{t} = 1 + \underline{r}</math></p> $n \frac{E_{0t}}{c} = \frac{E_{0i}}{c} - \frac{E_{0r}}{c} \Rightarrow n \underline{t} = 1 - \underline{r} \text{ donc } \underline{t} = \frac{2}{1+n} \text{ et } \underline{r} = \frac{1-n}{1+n}$	1
11-a)	$\langle \underline{\vec{\Pi}}_i \rangle = \frac{\langle \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i \rangle}{\mu_0} = \frac{(E_{0i})^2}{2\mu_0 c} ; \quad \langle \underline{\vec{\Pi}}_r \rangle = \frac{\langle \vec{E}_r \wedge \vec{B}_r \rangle}{\mu_0} = \frac{ E_{0r} ^2}{2\mu_0 c} \text{ et } \langle \underline{\vec{\Pi}}_t \rangle = \frac{\langle \vec{E}_t \wedge \vec{B}_t \rangle}{\mu_0} = n \frac{ E_{0t} ^2}{2\mu_0 c}$	1,5
11-b)	<p>La conservation de l'énergie s'écrit en <math>z=0</math> :</p> $\langle \underline{\vec{\Pi}}_i \rangle = \langle \underline{\vec{\Pi}}_r \rangle + \langle \underline{\vec{\Pi}}_t \rangle \Rightarrow \frac{\langle \underline{\vec{\Pi}}_i \rangle}{\langle \underline{\vec{\Pi}}_i \rangle} = \frac{\langle \underline{\vec{\Pi}}_r \rangle}{\langle \underline{\vec{\Pi}}_i \rangle} + \frac{\langle \underline{\vec{\Pi}}_t \rangle}{\langle \underline{\vec{\Pi}}_i \rangle} \Rightarrow 1 = R + T$	1
11-c)	$R = \frac{ E_{0r} ^2}{(E_{0i})^2} =  \underline{r} ^2 = \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} - \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}} \right)^2 \Rightarrow$ $R = \frac{2\omega_0^2 - 2\omega^2 + \omega_p^2 - 2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}}{2\omega_0^2 - 2\omega^2 + \omega_p^2 + 2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}}$	1
11-d)	<p>Si <math>\omega_0 &lt; \omega &lt; \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}</math> l'onde est totalement réfléchi donc <math>T = 0 \Rightarrow R = 1</math>.</p>	0,5

## III- Détermination des caractéristiques d'un OTC

12-	$\omega^2 \ll \omega_0^2 \ll \omega_0^2 + \omega_p^2 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} = \sqrt{\frac{(\omega_0^2 + \omega_p^2) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2}\right)}{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}}$ $n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\right)}$ $n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{2(\omega_0^2 + \omega_p^2)}\right)} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2}} + \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\omega^2 \omega_p^2}{2\omega_0^2 (\omega_0^2 + \omega_p^2)}}$ $n = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}{\omega_0} + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}} \omega^2 \left. \Rightarrow n = A + \frac{B}{\lambda^2} \text{ où } A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}{\omega_0} \text{ et } B = \frac{2\pi^2 c^2 \omega_p^2}{\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}} \right\}$ <p>Dans le vide <math>\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}</math></p>	2
-----	--	---



13-a)		2
	$\delta(M) = (FF_2 M_\infty) - (FF_1 M_\infty) = (F_2 H) = F_2 H = a \sin \theta$ $\tan \theta = \frac{x}{f} \Rightarrow \delta(M) = \frac{ax}{f}$ <p>Dans les conditions de Gauss on a : <math>\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta</math></p>	1,5
13-b)	<p>Les lignes d'égalité d'intensité sont définies par <math>\delta(M) = C^{te} \Rightarrow x = C^{te}</math> donc les franges d'interférences, observées sur l'écran, sont des droites parallèles à <math>Oy</math>.</p>	1
	$p_0 = \frac{\delta(x=0)}{\lambda_m} = 0$	0,5
14-a)	$\delta'(M) = (FF_2 M_\infty) - (FF_1 M_\infty) = ne + (F_2 H) - e = e(n-1) + F_2 H = e(n-1) + \frac{ax}{f}$	1,5
	$p'_0 = \frac{\delta'(x=0)}{\lambda_m} = \frac{e(n-1)}{\lambda_m}$	1
	<p>Pour <math>\omega &lt; \omega_0</math> on a <math>n &gt; n_a = 1</math> donc <math>p'_0 &gt; 0</math> : les franges d'interférence se traduisent vers <math>x &lt; 0</math></p>	1
14-b)	<p>Le nombre de franges défilées est :</p> $nb =  p'_0 - p_0  = \frac{e(n-1)}{\lambda_m} \Rightarrow n = \frac{nb \lambda_m}{e} + 1 = \frac{35 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-6}} + 1 = 2,05$	1,5
15-a)	<p>En lumière blanche <math>p'_0 = \frac{e(n(\lambda)-1)}{\lambda}</math> dépend de la longueur d'onde donc <math>p'_0</math> n'est pas entier pour toutes les radiations du visible d'où la frange au centre n'est pas blanche.</p>	1
15-b)	$p'(M) = \frac{\delta'(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda f} + \frac{e(n-1)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{ax}{f} + e(A-1) + \frac{eB}{\lambda^2} \right)$ $\left( \frac{\partial p'}{\partial \lambda} \right)_{x_a} = -\frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{ax}{f} + e(A-1) + \frac{eB}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{\lambda} \left( -\frac{2eB}{\lambda^3} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{ax_{ac}}{f} - e(A-1) - \frac{3eB}{\lambda_m^2} = 0$ $\Rightarrow x_{ac} = -\frac{fe}{a} \left( A-1 + \frac{3B}{\lambda_m^2} \right) = -\frac{fe}{a} \left( n-1 + \frac{2B}{\lambda_m^2} \right)$	2
15-c)	$B = \frac{\lambda_m^2}{2} \left( 1-n - \frac{ax_{ac}}{fe} \right) = \frac{36 \cdot 10^{-14}}{2} \left( 1-2,05 + \frac{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 4,5 \cdot 10^{-2}}{0,4 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \right) = 1,35 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$	1,5
	$A = n - \frac{B}{\lambda_m^2} = 2,05 - \frac{1,35 \cdot 10^{-14}}{36 \cdot 10^{-14}} = 2,0125$	1,5

16-

A partir des relations obtenues à la question 12- on déduit les valeurs de  $\omega_0$ ,  $\omega_p$  et  $N$  en effet on a :

$$A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}{\omega_0} \Rightarrow \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} = A\omega_0 \text{ et } \omega_p^2 = \omega_0^2(A^2 - 1) \Rightarrow B = \frac{2\pi^2 c^2 \omega_p^2}{\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}} = \frac{2\pi^2 c^2 (A^2 - 1)}{A\omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \pi c \sqrt{\frac{2(A^2 - 1)}{AB}}, \omega_p = \omega_0 \sqrt{A^2 - 1} \text{ et } N = \frac{\omega_p^2 m \varepsilon_0}{e^2}$$

2