Concours Physique et Chimie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 16 Juin 2011	**Heure : 8 H**	**Durée : 4 H**	**Nbre pages : 08**
Barème : Problème I : 09 pts			**problème II : 11 pts**

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions.
Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Problème I :
TOURBILLONS DANS UN FLUIDE PARFAIT

Données :

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel et f un champ scalaire on a :

$$div\,\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,f = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{F} - \Delta\vec{F}$$

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{v} \quad \text{avec } \vec{v} \text{ champ de vitesse.}$$

En coordonnées cylindriques on a :

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\left(f(r)\,\vec{u}_z\right) = -\frac{df(r)}{dr}\vec{u}_\theta$$

Dans certains fluides on constate que très souvent la vorticité est nulle partout dans le fluide sauf dans certaines régions qui ont la forme de tubes dits tubes de vorticité. Ce type d'écoulement correspond à des tourbillons ou vortex comme ceux des tornades et des cyclones ou des vidanges de récipient.

On caractérise la vorticité d'un écoulement par le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le champ de vitesse du fluide en écoulement.

On se propose d'étudier le vortex de Rankine, c'est un tourbillon où le tube de vorticité est modélisé par un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R.

On considère le système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe Oz, dirigé selon la verticale ascendante, et de base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

Dans le modèle envisagé le vecteur tourbillon est donné par : $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u}_z$ pour $r < R$

$\vec{\Omega} = \vec{0}$ pour $r > R$

où Ω est une constante.

On ne considérera que l'écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide parfait et homogène de masse volumique ρ.

Le fluide est soumis au seul champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$.

I- Etude d'un tourbillon

1-a) Quelles sont les équations locales vérifiées par le champ de vitesse $\vec{v}$. En déduire qu'il y a une analogie formelle avec la magnétostatique.

1-b) Quel est l'analogue de ce modèle de tourbillon en magnétostatique ? En exploitant cette analogie formelle, montrer que le champ de vitesse est de la forme $\vec{v}(M) = v(r)\,\vec{u}_\theta$.

2- Ecrire l'analogue du théorème d'Ampère et en déduire l'expression de $\vec{v}$ en tout point M du fluide. Tracer la courbe de variation de v en fonction de r et déterminer la vitesse maximale du fluide.

3-a) Montrer que l'équation d'Euler s'écrit : $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = -\dfrac{\overrightarrow{grad}\,p}{\rho} + \vec{g}$ où p est le champ de pression du fluide.

3-b) Déterminer le champ de pression $p(r,z)$ au sein du fluide pour $r > R$ et pour $r < R$. On posera $p_0 = \lim\limits_{\substack{r\to+\infty \\ z\to 0}} p(r,z)$.

4- <u>Tourbillon de vidange</u> : Le tourbillon considéré a lieu dans un liquide surmonté d'une atmosphère à la pression uniforme p_0.

4-a) Déterminer l'équation de la surface libre du liquide pour $r > R$ et pour $r < R$. L'altitude de la surface libre est supposée nulle lorsque r tend vers l'infini.

4-b) Dessiner la trace de la surface libre du tourbillon dans le plan $(\vec{u}_r,\vec{u}_z)$.

5- <u>Tornade</u> : Le tourbillon considéré a lieu dans l'air. On donne $\Omega = 0{,}83\ rad\cdot s^{-1}$; $R = 50\,m$; $\rho = 1{,}3\,kg\cdot m^{-3}$ et la célérité du son dans l'air $c = 340\,m\cdot s^{-1}$.

5-a) Justifier l'hypothèse que l'écoulement de l'air est incompressible.

5-b) En notant p_m la pression au centre du tourbillon et au niveau du sol en $z=0$, calculer $\Delta p = p_0 - p_m$ et commenter.

6-a) Montrer que pour un écoulement incompressible il existe un champ vectoriel $\vec{A}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$. Montrer que ce champ n'est pas unique. Par convention on choisit la condition $div\,\vec{A} = 0$, quel est le nom de l'équation analogue en magnétostatique ?

6-b) Déterminer l'équation locale liant $\vec{A}$ et $\vec{\Omega}$. Quelle est l'équation analogue en magnétostatique et quel est son nom ?

6-c) Par analogie formelle avec la magnétostatique, montrer que pour ce modèle de tourbillon on a : $\vec{A} = A(r)\,\vec{u}_z$ où $A(r)$ est appelée fonction de courant de l'écoulement.

6-d) Montrer que $A(r)$ est uniforme sur une ligne de courant.

6-e) Déterminer l'expression de $A(r)$ pour $r \rangle R$ et la mettre sous la forme : $A(r) = -\dfrac{I}{2\,\pi}\ln(r) + K$ où K est une constante et I l'intensité du tourbillon qu'on exprimera en fonction de Ω et R.

II- Interaction entre deux tourbillons

Soient deux tourbillons d'axes O_1z et O_2z, d'intensités respectives $I_1 = -I_2 = I$ et dont les tubes de vorticité ont le même rayon R (*figure* 1). Les coordonnées des points O_1 et O_2, dans le plan xOy, sont $O_1(d,0)$ et $O_2(-d,0)$.

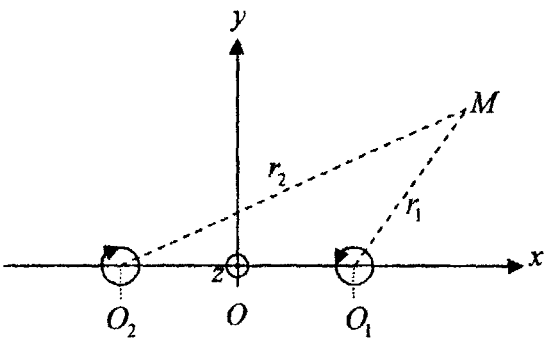


figure 1

7- Donner les expressions des fonctions de courants $A_1(r_1)$ et $A_2(r_2)$ créé par chacun des tourbillons en un point M tel que $r_1 \rangle R$ et $r_2 \rangle R$.

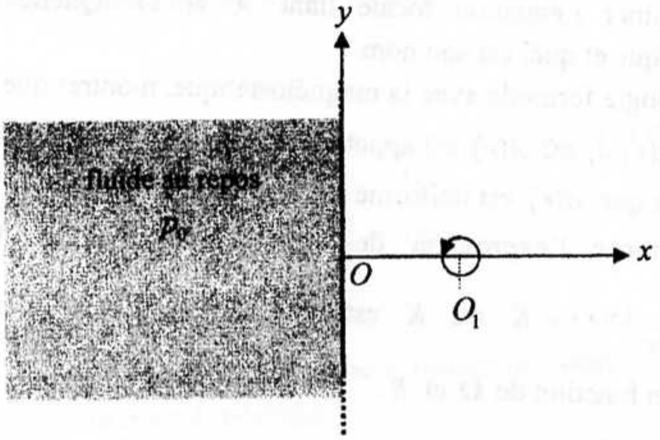
8- Quelle est la fonction de courant de l'écoulement résultant ? L'exprimer en fonction des coordonnées cartésiennes x et y du point M.

9- En déduire l'équation des lignes de courant et montrer qu'ils sont des cercles de centres appartenant à l'axe Ox dont on précisera les rayons. Représenter graphiquement l'allure de ces lignes.

10- Déterminer le champ de vitesse $\vec{v}(x,y)$ et en déduire que $\vec{v}(x=0,y) = -\dfrac{I\,d}{\pi\left(d^2+y^2\right)}\,\vec{u}_y$.

11- <u>Interaction entre un tourbillon et un mur</u> :

Un mur de longueur et de hauteur infinies est placé dans le plan $x = 0$. Dans le demi-espace $x > 0$ se trouve un tourbillon d'axe O_1z tel que $O_1(d,0)$ dans le plan xOy. Dans le demi-espace $x < 0$ se trouve un fluide au repos à la pression p_0 (*<u>figure</u>* 2).



<u>figure</u> 2

11-a) Le mur étant fixe, que peut-on dire de la cinématique de cet écoulement ? Justifier.

11-b) Déterminer la pression dans le plan $x = 0$ sachant qu'elle vaut p_0 lorsque x tend vers $+\infty$.

11-c) Déterminer la force que subie l'unité de hauteur le long de l'axe Oz du mur. Quel mouvement éventuel en résulte-t-il ?

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Problème II :

CARACTERISATION OPTIQUE D'UN OTC : OXYDE TRANSPARENT CONDUCTEUR

<u>Données</u> :

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel on a : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{F} - \Delta\vec{F}$

L'espace est rapporté au trièdre direct $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ est noté i.

On notera c la célérité de la lumière dans le vide.

Le problème est consacré à l'étude de la réflexion et de la transmission d'une onde électromagnétique sur un OTC et à la détermination de quelques constantes qui le caractérisent.

I- Propagation d'une onde électromagnétique dans un OTC

On considère un OTC solide homogène et ayant les mêmes propriétés que le vide (permittivité électrique ε_0 et perméabilité magnétique μ_0). Ce milieu est constitué d'un ensemble d'électrons de charge $-e$, de masse m et de densité uniforme N (nombre d'électrons par unité de volume). La neutralité électrique est assurée par les ions fixes de charges $+e$ et de même densité N.

On décrit les électrons du milieu OTC comme élastiquement liés aux noyaux. Dans le cadre de ce modèle l'électron est soumis à une force de rappel élastique $\vec{F} = -m\omega_0^2\,\vec{S}$ où $\vec{S}$ représente le vecteur déplacement d'un électron par rapport à sa position d'équilibre et ω_0 une constante positive appelée pulsation d'absorption. On négligera, dans ce modèle, la force d'amortissement.

Une onde électromagnétique incidente plane se propage dans l'air selon Oz croissant, de pulsation ω et polarisée rectilignement selon Ox. Cette onde arrive en incidence normale sur la face plane du milieu OTC située en $z = 0$ (*figure* 3). On assimilera l'air au vide.

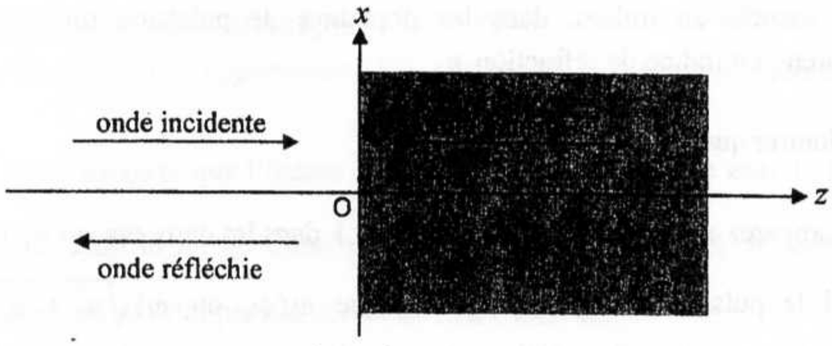


figure 3

Le champ électrique relatif à l'onde transmise dans le milieu OTC s'écrit en notation complexe : $\underline{\vec{E}}_t(M,t) = \underline{E}_{0t}\, e^{i(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x$ où k est le nombre d'onde et $\underline{E}_{0t}$ est l'amplitude du champ électrique transmis.

1- Justifier que le milieu reste localement neutre en présence de l'onde envisagée.

2- Soit λ la longueur d'onde de l'onde électromagnétique dans le milieu OTC, on a $\|\vec{S}\| \ll \lambda$.

2-a) Exprimer la force de Lorentz ressentie par les électrons en présence de l'onde. Justifier qu'on peut négliger la contribution du champ magnétique devant celle du champ électrique ?

2-b) Justifier qu'on peut, à l'échelle atomique, considérer le champ électromagnétique comme uniforme.

3-a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{S}$.

3-b) On se place en régime sinusoïdale forcé, montrer que le vecteur densité volumique de courant s'écrit en notation complexe : $\underline{\vec{j}} = \dfrac{i\,\varepsilon_0\,\omega_p^2\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\,\underline{\vec{E}}_t$ où ω_p est la pulsation plasma du milieu qu'on exprimera en fonction des données.

4- Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu. En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique en notation complexe. Cette équation est-elle vérifiée par le champ électrique en notation réelle ? Justifier.

5-a) Déterminer la relation de dispersion quadratique k^2 en fonction de ω^2.

5-b) Tracer l'allure de la courbe k^2 en fonction de ω^2.

5-c) Préciser suivant la valeur de ω la nature des ondes qui se propagent dans le milieu.

6- Calculer la puissance moyenne volumique dissipée par effet Joule dans le milieu et conclure.

7- Sur le milieu OTC on envoi une onde de pulsation ω telle que $\omega_0 \langle \omega \langle \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$, qu'arrive-t-il ?

8- On associe au milieu, dans les domaines de pulsation où il est considéré comme transparent, un indice de réfraction n.

8-a) Montrer que $n = \sqrt{\dfrac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$.

8-b) Comparer n avec l'indice de l'air $n_a = 1$ dans les deux cas $\omega \langle \omega_0$ et $\omega \rangle \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$.

8-c) Si la pulsation de l'onde est tel que $\omega \langle \omega_0$ ou $\omega \rangle \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$, y a-t-il forcément propagation dans le milieu ? Pour répondre à cette question il est commode de raisonner sur l'interface air-OTC comme en optique géométrique.

II- Réflexion et transmission sur l'OTC

Les champs électriques associés aux ondes incidente et réfléchie s'écrivent en notation complexe : $\vec{\underline{E}}_i(M,t) = E_{0i}\ e^{i(\omega t - k_0 z)}\ \vec{u}_x$ et $\vec{\underline{E}}_r(M,t) = \underline{E}_{0r}\ e^{i(\omega t + k_0 z)}\ \vec{u}_x$ où k_0 est le nombre d'onde dans le vide, E_{0i} et $\underline{E}_{0r}$ sont respectivement les amplitudes des champs électriques incident et réfléchi.

La pulsation ω de l'onde incidente correspond aux domaines pour lesquels le milieu OTC est transparent d'indice de réfraction n.

9- Donner les expressions des champs magnétiques $\vec{\underline{B}}_i$, $\vec{\underline{B}}_r$ et $\vec{\underline{B}}_t$ associés respectivement aux ondes incidente, réfléchie et transmise.

10-a) Quelles relations les champs électrique et magnétique des ondes incidente, réfléchie et transmise doivent-ils vérifier à l'interface air-OTC ? On admettra l'absence de courant sur l'interface.

10-b) En déduire les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude définis respectivement par : $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{0r}}{E_{0i}}$ et $\underline{t} = \dfrac{\underline{E}_{0t}}{E_{0i}}$.

11-a) Déterminer en $z = 0$ les expressions des valeurs moyennes temporelles des vecteurs de Poynting $\langle \vec{\Pi}_i \rangle$, $\langle \vec{\Pi}_r \rangle$ et $\langle \vec{\Pi}_t \rangle$ associés respectivement aux ondes incidente, réfléchie et transmise.

11-b) Les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance sont définis en $z = 0$ par $R = \dfrac{\left\| \langle \vec{\Pi}_r \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|}$ et $T = \dfrac{\left\| \langle \vec{\Pi}_t \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|}$. Etablir la relation entre R et T.

11-c) Montrer que R s'écrit : $R = \dfrac{2\omega_0^2 - 2\omega^2 + \omega_p^2 - 2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}}{2\omega_0^2 - 2\omega^2 + \omega_p^2 + 2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}}$.

11-d) Justifier que $R = 1$ pour $\omega_0 \langle \omega \langle \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$.

III- Détermination des caractéristiques d'un OTC

Dans le domaine du visible, appartenant à l'intervalle $\omega \langle \omega_0$, l'OTC considéré est transparent.

12- Pour $\omega^2 \langle\langle \omega_0^2$ montrer que l'indice de réfraction de l'OTC varie avec la longueur d'onde λ dans le vide selon la loi de Cauchy : $n(\lambda) = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$, où A et B sont des constantes positives. On fera un développement limité à l'ordre 2 en ω.

On considère le dispositif des fentes d'Young éclairé par une fente source fine parallèle à Oy, monochromatique de longueur d'onde λ_m et dont le centre F est placé au foyer objet d'une lentille convergente L_1. Les fentes d'Young F_1 et F_2 sont fines, parallèles à la fente source et distantes de a. On observe les interférences sur un écran placé dans le plan focal image (xOy) d'une lentille convergente L_2 de distance focale f (*figure* 4).

L'expérience des fentes d'Young est réalisée dans l'air d'indice de réfraction $n_a = 1$.

Les conditions de l'approximation de Gauss sont valables.

On donne : $a = 0{,}2\ mm$; $f = 40\ cm$ et $\lambda_m = 600\ nm$.

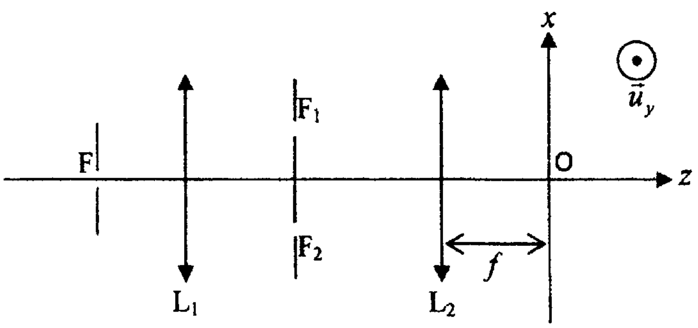


figure 4

13-a) Tracer la marche de deux rayons lumineux issus de F et qui interférent en un point M de l'écran d'abscisse x et déterminer la différence de marche $\delta(\mathrm{M})$ entre les deux vibrations associées à ces deux rayons.

13-b) Décrire la figure observée sur l'écran et déterminer l'ordre d'interférence p_0 au centre de la figure.

14- On place devant la fente F_2, du coté de L_1 et perpendiculairement à l'axe optique Oz une lame d'OTC d'épaisseur e et d'indice de réfraction $n(\lambda)$.

14-a) Déterminer la différence de marche δ' au point M de l'écran. Déduire l'ordre d'interférence p'_0 au centre de la figure et commenter.

14-b) Avec une lame d'OTC on compte 35 franges défilées. Calculer l'indice n de la lame correspondant à la longueur d'onde λ_m. On donne $e = 20\ \mu m$.

15- La lame étant placée devant la fente F_2, on remplace la source monochromatique par une source de lumière blanche.

15-a) La frange au centre de la figure est-elle blanche ?

15-b) On appelle frange achromatique celle pour laquelle $\left(\dfrac{\partial p'(M)}{\partial \lambda}\right)_{x_{ac}} = 0$ pour une longueur d'onde moyenne à laquelle l'œil présente une sensibilité maximale $\lambda_m = 600\ nm$, $p'(M)$ est l'ordre d'interférence en un point M de l'écran. Déterminer la position x_{ac} de la frange achromatique.

15-c) Sachant que pour la lame d'OTC, la position de la frange achromatique est en $x_{ac} = -4,5\ cm$ et en utilisant les résultats de la question 14-b), calculer les valeurs de A et B.

16- Comment peut-on déterminer les valeurs de ω_0, ω_p et N caractéristiques de l'OTC ?

Fin de l'Epreuve