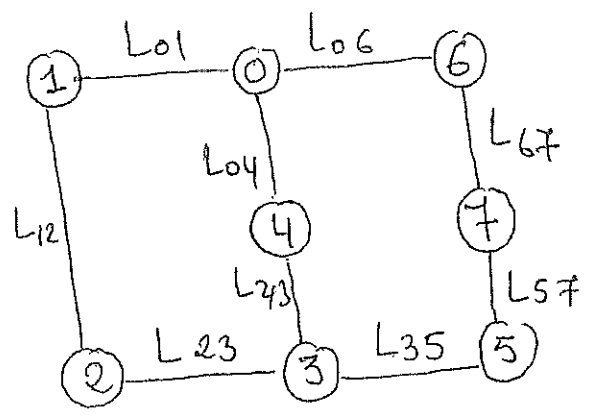


B.1. Etude de l'excitateur

B.1.1 Liaisons



- L_{01} : pivot d'axe (O, \vec{z}_0)
- L_{06} : pivot d'axe (F, \vec{x}_0)
- L_{67} : hélicoïdale d'axe (E, \vec{x}_0)
- L_{57} : rotule de centre H
- L_{35} : pivot glissant d'axe (H, \vec{x}_2)
- L_{34} : pivot d'axe (E, \vec{z}_2)
- L_{04} : pivot d'axe (O, \vec{z}_0)
- L_{23} : pivot glissant d'axe (B, \vec{x}_2)
- L_{12} : pivot d'axe (A, \vec{z}_0)
- L_{07} : glissière d'axe (K, \vec{x}_0) ;

B.1.2 Vecteurs rotation

$$\vec{\omega}_{4/0} = \dot{\alpha} \vec{z}_0; \quad \vec{\omega}_{2/0} = -\dot{\theta} \vec{z}_0; \quad \vec{\omega}_{3/2} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{4/0} = \dot{\varphi} \vec{z}_0; \quad \vec{\omega}_{6/0} = \dot{\psi} \vec{x}_0; \quad \vec{\omega}_{7/0} = \vec{0}$$

B.1.3 Torseur cinématique

$$\left\{ \mathcal{V}_{6/7} \right\}_E = \left\{ \vec{\omega}_{6/7} \mid \vec{v}_{E \in 6/7} \right\}$$

$$\vec{\omega}_{6/7} = \vec{\omega}_{6/0} + \vec{\omega}_{0/7} = \dot{\psi} \vec{x}_0$$

$$\vec{v}_{E \in 6/7} = \vec{v}_{E \in 6/0} - \vec{v}_{E \in 7/0} = \vec{0} - \dot{\psi} \vec{x}_0 = \frac{\dot{\psi}}{2\pi} P$$

B.1.4 Vitesse de $E \in 7 / 0$

$$\vec{v}_{E \in 7/0} = \left. \frac{dFE}{dt} \right|_{R_0} = -\dot{\psi} \vec{x}_0$$

B.1.5 Nombre de roues

$$dx = \frac{P}{2\pi} d\psi \Rightarrow d - x(0) = \frac{P}{2\pi} \psi(d) = P \cdot N$$

$$N = 14 \text{ roues}$$

B.1.6 Chaîne cinématique de réglage

$$0 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0$$

B.1.7 classe équivalente

$$x = \text{cte} \Rightarrow \dot{x} = 0 \text{ et } \ddot{\psi} = 0$$

cela conduit à : $\bullet \vec{V}_{E \in 7/0} = \vec{0}$ et tous les points de 7

sont fixes par rapport à (0)

$\bullet \vec{R}_{6/0} = \vec{0}$ et tous les points de (6) sont fixes par rapport à (0)

B.1.8 liaison équivalente

$$\left\{ \mathcal{U}_{3/5} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c|c} P_{35} & x_{35} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

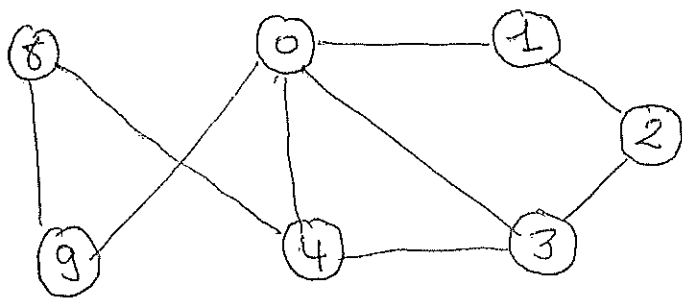
$$\left\{ \mathcal{U}_{5/7} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c|c} P_{57} & 0 \\ q_{57} & 0 \\ r_{57} & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

$$\left\{ \mathcal{U}_{7/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{U}_{3/0} \right\}_H = \left\{ \mathcal{U}_{3/5} \right\}_H + \left\{ \mathcal{U}_{5/7} \right\}_H + \left\{ \mathcal{U}_{7/0} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c|c} P_{35} + P_{57} & x_{35} \\ q_{57} & 0 \\ r_{57} & 0 \end{array} \right\}$$

La liaison possède 4 degrés de liberté dans le système d'axe $(H, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (3 rotations + 1 translation suivant $(H, \vec{x}_2) \Rightarrow$ linéaire annulaire. d'axe (H, \vec{x}_2))

B.1.9 graphe de liaison



B.1.10 Fermeture de la chaîne 01230

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BH}$$

$$(L_0 - d) \vec{x}_0 = r_1 \vec{x}_1 + (\lambda + \mu) \vec{x}_2$$

B.1.11 relation entre α et θ

$$\vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x}_0 + \sin \alpha \vec{y}_0$$

$$\vec{x}_2 = \cos \theta \vec{x}_0 - \sin \theta \vec{y}_0$$

$$(L_0 - d) \vec{x}_0 = [r_1 \cos \alpha + (\lambda + \mu) \cos \theta] \vec{x}_0 + [r_1 \sin \alpha - (\lambda + \mu) \sin \theta] \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_0 - d = r_1 \cos \alpha + (\lambda + \mu) \cos \theta \\ 0 = r_1 \sin \alpha - (\lambda + \mu) \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{r_1 \sin \alpha}{L_0 - d - r_1 \cos \alpha}$$

B.1.12 Fermeture de la chaîne 0340

$$\vec{HD} = \vec{HC} + \vec{CD}$$

$$d \vec{x}_0 = (L_3 - \mu) \vec{x}_2 + r_4 \vec{x}_4$$

B.1.13 relation entre φ et θ

$$d = (L_3 - \mu) \cos \theta + r_4 \cos \varphi \quad \Rightarrow \tan \theta = \frac{r_4 \sin \varphi}{d - r_4 \cos \varphi}$$

$$0 = r_4 \sin \varphi - (L_3 - \mu) \sin \theta$$

B. 1. 14 loi entrée / sortie

$$\frac{r_1 \sin \alpha}{L_0 - d - r_1 \cos \alpha} = \frac{r_4 \sin \varphi}{d - r_4 \cos \varphi}$$

B. 1. 15 Valeurs particulières de φ

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \frac{r_4 \sin \varphi_1}{d - r_4 \cos \varphi_1} = \frac{r_1}{L_0 - d}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \quad \frac{r_4 \sin \varphi_2}{d - r_4 \cos \varphi_2} = -\frac{r_1}{L_0 - d}$$

B. 1. 16 Vitesse angulaire de (4) par rapport à (0)

La loi entrée sortie s'écrit :

$$(d - r_4 \cos \varphi) r_1 \sin \alpha = (L_0 - d - r_1 \cos \alpha) r_4 \sin \varphi$$

La dérivation donne :

$$r_1 \omega \cos \alpha (d - r_4 \cos \varphi) + r_1 r_4 \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \alpha =$$

$$r_4 \dot{\varphi} \cos \varphi (L_0 - d - r_1 \cos \alpha) + r_1 r_4 \omega \sin \alpha \sin \varphi$$

$$\text{à } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ on a } \varphi = \varphi_1 \text{ et } \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$$

$$\text{avec } \dot{\varphi}_1 = \frac{r_1 \omega \sin \varphi_1}{r_1 \sin \varphi_1 - (L_0 - d) \cos \varphi_1}$$

$$\text{à } \alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ on a } \varphi = \varphi_2 \text{ et } \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_2 \text{ avec.}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{r_1 \omega \sin \varphi_2}{r_1 \sin \varphi_2 + (L_0 - d) \cos \varphi_2}$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{0 \rightarrow 1} \right\}_0 = \left\{ \begin{array}{c|c} x_{01} & L_{01} \\ y_{01} & M_{01} \\ z_{01} & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{0 \rightarrow 9} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} x_{0g} & L_{0g} \\ y_{0g} & M_{0g} \\ z_{0g} & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{0 \rightarrow 4} \right\}_0 = \left\{ \begin{array}{c|c} x_{04} & L_{04} \\ y_{04} & M_{04} \\ z_{04} & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{\text{terre} \rightarrow 10} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -Mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{0 \rightarrow 3} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ y_{03} & M_{03} \\ z_{03} & M_{03} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{\text{mot} \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

B.2.5 : Puissances des actions

- $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow 1) = C_m \dot{\alpha} = C_m \omega$

- $\mathcal{P}(\text{terre} \rightarrow 10) = \vec{P}_{10} \cdot \vec{V}_{G/0}$

$$= -Mg \vec{y}_0 \cdot (L_4 \dot{\varphi} \vec{x}_4 + \dot{\eta} \vec{z}_0)$$

$$= -Mg L_4 \dot{\varphi} \sin \varphi$$

- $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ (liaisons parfaite)

B.2.6 Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_c(S/0)}{dt} = C_m \dot{\alpha} - Mg L_4 \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\frac{dE_c(S/0)}{dt} = M L_4^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + M \dot{\eta} \ddot{\eta} + M L_4 \dot{\varphi} \dot{\eta} \cos \varphi + M L_4 \dot{\varphi} \dot{\eta} \cos \varphi - M L_4 \dot{\varphi}^2 \dot{\eta} \sin \varphi$$

B.2.7 Cas ou (10) est immuable % a(8)

$$\eta = \text{cte}, \quad \dot{\eta} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0$$

$$ML_4^2 \ddot{\varphi} = C_m \omega - Mg L_4 \dot{\varphi} \sin \varphi$$

B.2.7 Cas ou 10 se translate avec $\dot{\eta} = V_0$

$$\dot{\eta} = V_0; \quad \ddot{\eta} = 0$$

$$ML_4^2 \ddot{\varphi} + ML_4 \dot{\varphi} V_0 \cos \varphi - ML_4 \dot{\varphi}^2 V_0 \sin \varphi = C_m \omega - Mg L_4 \dot{\varphi} \sin \varphi$$

B.2.8 Couple moteur à $\alpha = \frac{\pi}{2}$

• Calcul de l'accélération $\ddot{\varphi}$ par dérivation de la

relation obtenue à B.1.16

$$\begin{aligned} & -r_1 \omega^2 \sin \alpha (d - r_4 \cos \varphi) + r_1 r_4 \omega \dot{\varphi} \cos \alpha \sin \varphi + r_1 r_4 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \alpha + \\ & r_1 r_4 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \alpha + r_1 r_4 \dot{\varphi} \omega \sin \varphi \cos \alpha = r_4 \dot{\varphi} \cos \varphi (L_0 - d - r_1 \cos \alpha) - \\ & r_4 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi (L_0 - d - r_1 \cos \alpha) + r_1 r_4 \omega \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha + \\ & r_1 r_4 \omega^2 \cos \alpha \sin \varphi + r_1 r_4 \omega \dot{\varphi} \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on obtient $\varphi = \varphi_1$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$ et

la relation devient:

$$\begin{aligned} & -r_1 \omega^2 (d - r_4 \cos \varphi_1) + r_1 r_4 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + r_1 r_4 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 = \\ & r_4 (L_0 - d) \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - r_4 (L_0 - d) \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 + 2 r_1 r_4 \dot{\varphi}_1 \omega \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

1/ tout calcul fait on obtient:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{r_1/4 \dot{\varphi}_1 (2\omega - \dot{\varphi}_1) \cos \varphi_1 + r_1 \omega^2 (d - r_1 \cos \varphi_1) - r_1 (L_0 - d) \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1}{r_1 [r_1 \sin \varphi_1 - (L_0 - d) \cos \varphi_1]}$$

ou peut la mettre sous la forme:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_1^2 (2\omega - \dot{\varphi}_1) \cot \varphi_1}{\omega} + \frac{\omega \dot{\varphi}_1 (d - r_1 \cos \varphi_1) - (L_0 - d) \dot{\varphi}_1^3}{r_1 \omega}$$

Expression du couple:

Cas I: $C_m = ML_4 r_1 \frac{\sin \varphi_1}{r_1 \sin \varphi_1 - (L_0 - d) \cos \varphi_1} \cdot (L_4 \dot{\varphi}_1^{\omega} + g \sin \varphi_1)$

Cas II: $C_m = ML_4 r_1 (L_4 \dot{\varphi}_1^{\omega} + g \sin \varphi_1) \cdot \frac{\sin \varphi_1}{r_1 \sin \varphi_1 - (L_0 - d) \cos \varphi_1} +$

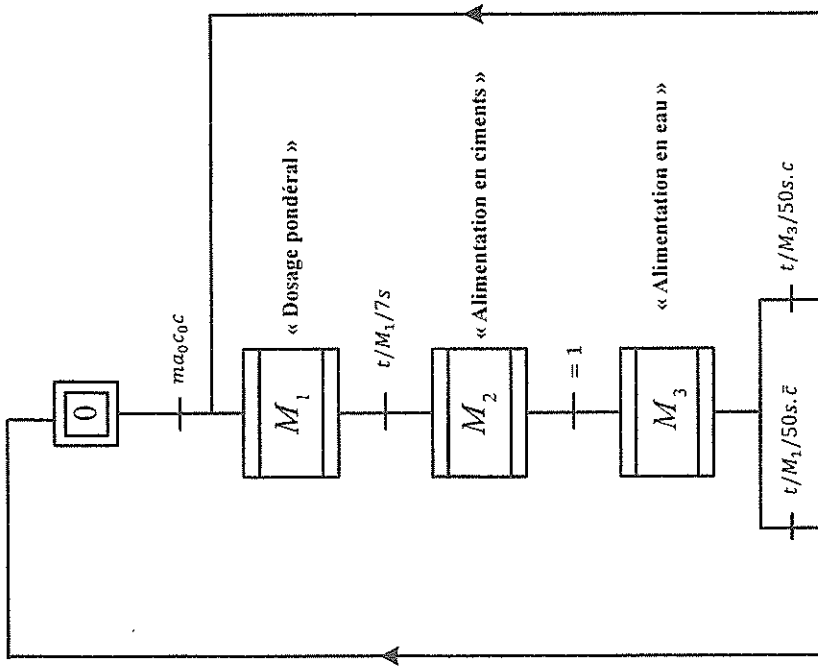
$$\frac{ML_4 V_0}{\omega} \left[\dot{\varphi}_1^{\omega} \cos \varphi_1 - \frac{r_1^2 \sin^3 \varphi_1}{(r_1 \sin \varphi_1 - (L_0 - d) \cos \varphi_1)^2} \right]$$

Pour déterminer C_m on remplace $\dot{\varphi}_1^{\omega}$ par son expression.

PARTIE : AUTOMATIQUE

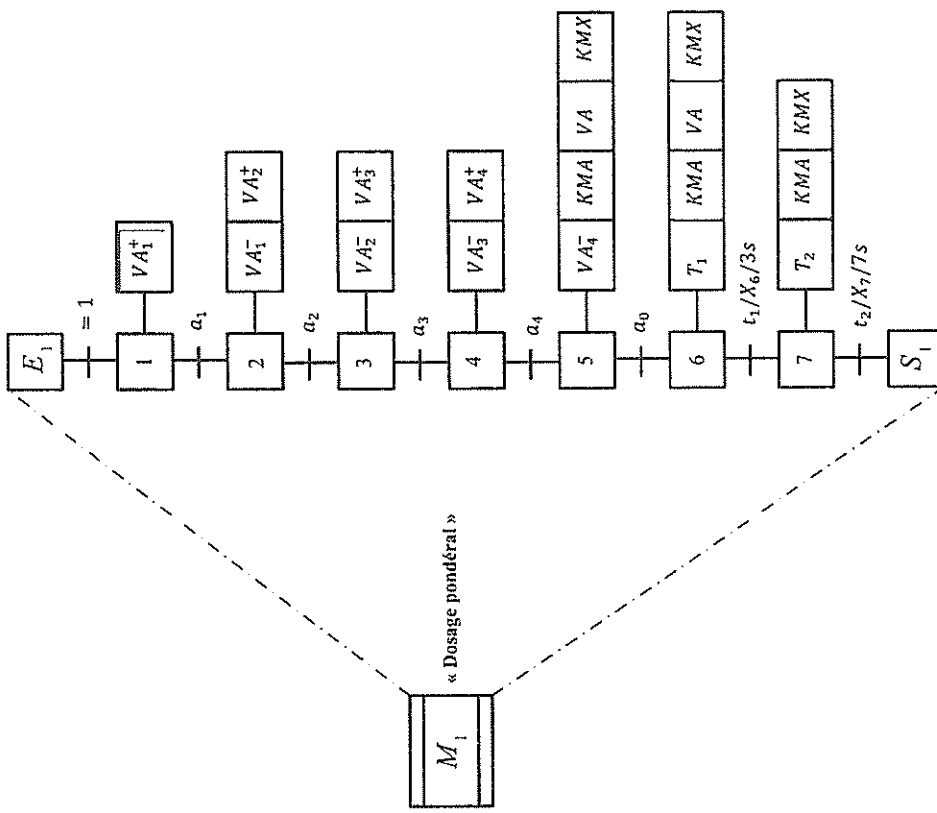
D.1- Commande séquentielle d'une centrale à béton

D.1.1- Compléter le Grafcet suivant, décrivant le fonctionnement de la centrale à béton.



Grafcet du point de vue commande décrivant le fonctionnement de la centrale à béton.

D.1.2- Compléter l'expansion de la macro-étape M_1 « Dosage pondéral » dont la structure est donnée par le modèle suivant :



Expansion de la macro-étape M_1 « Dosage pondéral »

Dans la suite, on choisira $K' = 0.45$

D.2.5- Sachant que la fonction de transfert du régulateur est $R(p) = K$:

D.2.5.1- Quelle est la condition que doit satisfaire $K = f(K', \tau_e, \tau_m)$ assurant stabilité du système en boucle fermée :

L'E.C. du système est :

1^{re} condition $\Rightarrow K > 0$
 2^{ème} condition :

$$\tau_e \tau_m p^3 + (\tau_e + \tau_m) p^2 + p + 0.45K = 0$$

p^3	$\tau_e \tau_m$	1
p^2	$\tau_e + \tau_m$	0.45K
p^1	$1 - \frac{\tau_e \tau_m}{\tau_e + \tau_m}$	$0 < K < \frac{\tau_e \tau_m}{\tau_e + \tau_m} = 2.22$
p^0	0.45K	

Faire l'application numérique :

$$0 < K < 150.92$$

D.2.5.2- Déterminer les erreurs statiques de position ϵ_p et de vitesse ϵ_v , pour des consignes respectivement d'amplitude et de pente unitaires, en fonction de K.

La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$T(p) = \frac{0.45K}{p(1 + 0.015p)(1 + 0.826p)} \Rightarrow \text{système de classe 1}$$

L'erreur statique de position est donc

$$\epsilon_p = 0$$

L'erreur statique de position est donc

$$\epsilon_v = \frac{1}{0.45K}$$

D.2.5.3- Est ce qu'on peut assurer une erreur statique de vitesse pour une consigne de pente unitaire inférieure à 10^{-2} ? Justifier votre réponse.

Si $\epsilon_v = 10^{-2}$ alors $K = 222.22$ dans ce cas le système est instable ; donc

$K > 150.92$
 Impossible d'assurer une telle erreur

D.2.6- On considère toujours $R(p) = K$ tout en négligeant l'effet dera ($c \rightarrow d : \tau_e = 0$).

D.2.6.1- Etablir l'expression de la fonction de transfert du système en boucle fermée $H_{BF}(p)$ en fonction de K, K' et τ_m .

$$H_{BF}(p) = \frac{KK'}{p(1 + \tau_m p) + KK'}$$

Faire l'application numérique :

$$H_{BF}(p) = \frac{0.45K}{0.8p^2 + p + 0.45K}$$

D.2.6.2- Pour quelles valeurs de K, le système est stable en boucle fermée

Système de second ordre :

Système stable $\Leftrightarrow K > 0$

D.2.6.3- Déterminer les erreurs statiques de position et de vitesse, pour des consignes respectivement d'amplitude et de pente unitaires, en fonction de K.

Fonction de transfert en boucle ouverte est $T(p) = \frac{KK'}{p(1 + \tau_m p)} \Rightarrow$ système de classe 1

$$\epsilon_p = 0$$

L'erreur statique de vitesse est $\epsilon_v = \frac{1}{0.45K}$

$$\epsilon_v = \frac{1}{0.45K}$$

D.2.6.4- Est ce qu'on peut assurer une erreur statique de vitesse pour une consigne de pente unitaire inférieure à 10^{-2} ? Justifier votre réponse.

Si $\epsilon_v < 10^{-2}$ alors $K > 222.22$ dans ce cas le système est ts stable ($K > 0$) ; donc

$K > 222.22$
 Donc il est possible d'assurer une telle erreur

D.2.6.5- Etablir les expressions du gain statique K_s , du coefficient d'amortissement m et de la pulsation propre non amortie ω_0 en fonction de K, K' et τ_m du système bouclé.

$$H_{BF}(p) = \frac{K_s \omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

En effet,

$$H_{BF}(p) = \frac{KK'}{p(1 + \tau_m p) + KK'}$$

D'où :

$$H_{BF}(p) = \frac{KK' / \tau_m}{p^2 + \frac{1}{\tau_m} p + KK' / \tau_m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = KK' / \tau_m \\ K_s \omega_0^2 = KK' / \tau_m \\ 2m\omega_0 = \frac{1}{\tau_m} \end{cases}$$

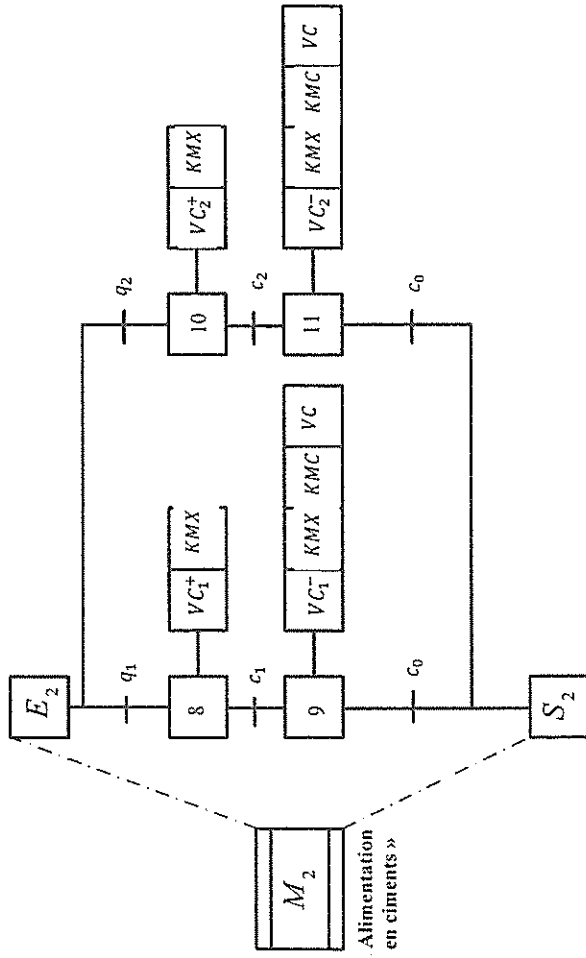
donc

$$K_s = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{KK' / \tau_m}$$

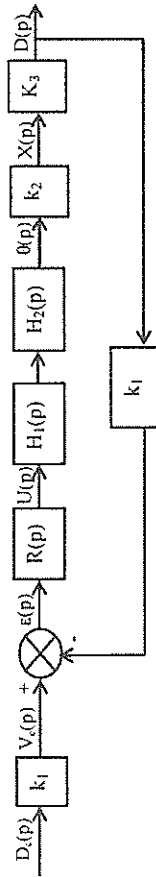
$$m = 0.5 \sqrt{\frac{\tau_m}{KK'}}$$

D.1.3. Compléter l'expansion de la macro-étape M₂ « Alimentation en ciment » dont la structure est donnée par le modèle suivant :



Expansion de la macro-étape M₂ « Alimentation en ciment »

D.2.1- Etablir le schéma fonctionnel du système asservi



D.2.2- Déterminer les fonctions de transfert H₁(p) et H₂(p)

La fonction H₁(p) est de la forme $\frac{K}{1+\tau p}$

- $20 \log(K) \cong -3,125 \text{ dB} \Rightarrow K = 0,7$
- La pulsation de coupure est $\omega_c \cong 70 \text{ rad/s} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_c} = 0,015 \text{ s}$ d'où

$$H_1(p) = \frac{0,7}{1 + 0,015p}$$

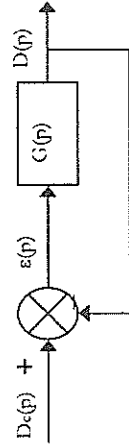
La fonction H₂(p) est la transformée de Laplace de $\theta(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}$; d'où $H_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_m}} = \frac{1}{p(1 + \tau_m p)}$ qui est la forme de la réponse indicielle unitaire d'un système de premier ordre de gain 1 et de constante de temps τ_m . Sachant que $0,63\theta(\infty) = \theta(\tau_m) \Rightarrow \tau_m = 0,826 \text{ s}$

$$H_2(p) = \frac{1}{p(1 + 0,826p)}$$

D.2.3- Mettre la fonction de transfert du motoréducteur sous la forme :

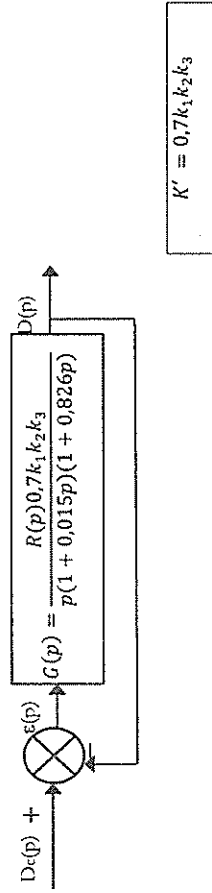
$$H(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{p(1 + \tau_p p)(1 + \tau_m p)} \Rightarrow H(p) = \frac{0,7}{(1 + 0,015p)p(1 + 0,826p)}$$

D.2.4- Simplifier le schéma fonctionnel de la question D.2.1 en mettant sous la forme suivante :



Avec : $G(p) = \frac{R(p)K'}{p(1 + \tau_p p)(1 + \tau_m p)}$

Le schéma de la figure D2.1, pour se mettre sous la forme suivante :



En déduire la valeur de K' si :

$k_1 = 0,5 \text{ V.s/Kg}$, $k_2 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m/rad}$, $k_3 = 15 \cdot 10^2 \text{ Kg/m.s}$; $\tau_e = 0,015 \text{ s}$ et $\tau_m = 0,8 \text{ s}$

$$K' = 31,5 \cdot 10^{-4}$$

D.2.6.6- Calculer la valeur de K , pour avoir une marge de phase de $M_\varphi=45^\circ$. En déduire le coefficient d'amortissement m et la pulsation propre non amortie ω_0 . Quelle est la marge de gain M_G du système ? La marge de phase est définie par :

$$M_\varphi = \pi + \arg(T(\omega_A)) \text{ avec } \omega_A \text{ est telle que } |T(j\omega_A)| = 1 \text{ sachant que } T(p) = \frac{0,45K}{p(1+0,8p)}$$

$$M_\varphi = \pi + \arg(T(\omega_A)) \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan(0,8\omega_A) \Rightarrow \arctan(0,8\omega_A) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_A = 1,25 \text{ rd/s}$$

$$\text{Or } |T(j\omega_A)| = 1 = \frac{0,45K}{\omega_A \sqrt{1+0,64\omega_A^2}} \Rightarrow K = 3,92$$

$K_s=1$
$M_G = \infty$

$$\omega_0 = 1,48 \text{ rd/s}$$

$$m = 0,33$$