REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين
المهندسين
دورة 2012

Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 4 Juin 2012 **Heure :** 8 H **Durée:** 4 heures **Nb pages:** 5	
Barème: **Partie I:** 3 pts, **Partie II:** 1.5 pts, **Partie III:** 5 pts, **Partie IV**:7 pts, **Partie V**: 3.5 pts	

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Rappels et notations:

- $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On confondra entre polynôme et fonction polynôme associée.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à n.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $C(I,\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

PROBLÈME

Considérons dans $\mathbb{R}[X]$ les deux polynômes suivants:

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \qquad \text{et} \qquad B = \beta_0 + \beta_1 X.$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose:

$$\mathscr{L}(P) = AP'' + BP'.$$

PARTIE I

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{L}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Dans la suite de la partie I , on prend $n = 2$.

2. (a) Montrer que la matrice M de $\mathscr{L}$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & \beta_1 & 2(\alpha_1 + \beta_0) \\ 0 & 0 & 2(\alpha_2 + \beta_1) \end{pmatrix}.$$

(b) Vérifier que, si $\forall\, k \in \{0, 1, 2\}$, $k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$, alors M est diagonalisable.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et que $\beta_1 \neq 0$.

   (a) Vérifier que M est diagonalisable.

   (b) Donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui diagonalise M.

4. On prend $A = \alpha_2(X^2 - 1)$ et $B = \beta_0 + \beta_1 X$, avec $\beta_1 \neq 0$ et $2\alpha_2 + \beta_1 = 0$.
Montrer que, dans ce cas, M est diagonalisable si et seulement si $\beta_0 = 0$.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ω une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+^*$.
Dans toute la suite du problème, on note **H** l'ensemble des fonctions f **continues** sur I à valeurs réelles, telles que ωf^2 soit **intégrable** sur I.

PARTIE II

1. (a) Vérifier que l'on a: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$.

   (b) Montrer alors que **H** est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

2. Soient f et g dans **H**. Montrer que $\omega.f.g$ est intégrable sur I.

3. On associe à tout couple (f, g) de vecteurs de **H** le réel:

$$< f, g >= \int_I \omega(t) f(t) g(t)\, dt.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur **H**.

Dans ce qui suit, on munit **H** du produit scalaire $< . , . >$.

PARTIE III

Dans cette partie, on considère $I =]-1, 1[$, ω définie sur I par

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$A = X^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad B = 2X + 1.$$

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$.

1. Vérifier que $(x^2 - 1)\omega'(x) = \omega(x)$, pour tout $x \in]-1, 1[$.

2. (a) Déterminer $\mathscr{L}(X^k)$, pour $k \in \{0, ..., n\}$.

   (b) Écrire la matrice de $\mathscr{L}$ dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Montrer alors que l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$ est donné par:

$$\{\lambda_k = k(k+1),\ k \in \{0, ..., n\}\}\ .$$

(d) En déduire que $\mathscr{L}$ est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

3. (a) Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, ..., P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de $\mathscr{L}$, telle que P_k soit unitaire pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.
   (b) Montrer que $deg(P_k) = k$, $\forall\, k \in \{0, ..., n\}$.
   (c) Expliciter P_0 , P_1 et P_2.
4. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k\omega(x)$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbf{H}$.
5. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Soit $[\alpha, \beta] \subset]-1, 1[$. En remarquant que $\mathscr{L}(P) - P' = \big((X^2-1)P'\big)'$, montrer que:

$$\int_\alpha^\beta \mathscr{L}(P)(t)Q(t)\omega(t)dt = \big[(t^2-1)P'(t).Q(t)\omega(t)\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (t^2-1)P'(t)Q'(t)\omega(t)dt.$$

   (b) Démontrer alors que:

$$< \mathscr{L}(P), Q >= \int_{-1}^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}P'(t)Q'(t)dt =< P, \mathscr{L}(Q) > .$$

6. Déduire de ce qui précède que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la suite de ce problème, on admettra que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

PARTIE IV

Dans cette partie, on considère $I = \mathbb{R}$, ω définie sur I par

$$\omega(x) = e^{-x^2},$$

$$A = 1 \qquad \text{et} \qquad B = -2X.$$

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction H_n par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\omega^{(n)}(x),$$

où $\omega^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de ω si $n \geqslant 1$ et $\omega^{(0)} = \omega$.

1. Calculer H_0, H_1 et H_2.
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbf{H}$.
3. Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.
4. (a) Établir: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.
   (On pourra utiliser la formule de Leibniz)

(b) En déduire que: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

5. (a) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que H_n est un polynôme de degré n, dont on précisera le coefficient dominant.

   (b) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

6. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un vecteur propre de $\mathscr{L}$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors:

$$\lim_{x \to +\infty} P(x)\omega^{(n-1)}(x) = \lim_{x \to -\infty} P(x)\omega^{(n-1)}(x) = 0.$$

   (b) En déduire que

$$< H_n, H_0 >= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \sqrt{\pi} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

   (c) A l'aide d'une intégration par parties convenable, montrer que:

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}^*, \quad < H_n, H_m >= 2m < H_{n-1}, H_{m-1} > .$$

   (d) Montrer alors que $(H_n)_{n \geqslant 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (e) Que vaut $< H_n, H_n >$?

   (f) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{< P, H_k >}{2^k . k! \sqrt{\pi}} H_k.$$

8. (a) Établir par récurrence:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(e^{-(x-t)^2}\right) = H_n(x-t)e^{-(x-t)^2}.$$

   (b) i. Soit x un réel fixé. Montrer sans calcul que la fonction: $g_x : t \mapsto e^{2xt-t^2}$ est développable en série entière en la variable t, au voisinage de 0.

      ii. En déduire:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

   (c) i. Vérifier que $\varphi : x \mapsto e^x$ est un élément de $\mathbf{H}$.

      ii. Montrer que $< \varphi, H_n >=< \varphi, H_{n-1} >$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

      iii. Calculer alors $< \varphi, H_n >$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   (d) Conclure, par 8.(b), que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{< \varphi, H_n >}{2^n . n! \sqrt{\pi}} H_n(x).$$

PARTIE V

On désigne par $L_c^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, **continues** et **intégrables sur** $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in L_c^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{itx} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   On définit alors
   $$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que, $\forall\, f, g \in L_c^1(\mathbb{R})$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$: $\widehat{\lambda f + g} = \lambda \widehat{f} + \widehat{g}$.

3. Montrer que $\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $f \in L_c^1(\mathbb{R})$. On suppose que h: $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\left(\widehat{f}\right)' = i.\widehat{h}$.

5. Soit $f \in L_c^1(\mathbb{R})$. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f' \in L_c^1(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{(f')}(x) = -ix\widehat{f}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. Soit $\varphi_0 : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Montrer que φ_0 vérifie les hypothèses de 3) et 4) de cette partie.
   (b) Donner une équation différentielle vérifiée par φ_0.
   (c) En déduire que $\widehat{\varphi_0}$ vérifie une équation différentielle qu'on précisera.
   (d) En déduire que $\widehat{\varphi_0} = \sqrt{2\pi}.\varphi_0$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : x \mapsto H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}}$. ($H_n$ étant défini dans la partie IV).
   (a) Donner une relation entre les fonctions φ_{n+1} , φ_n et φ_n', pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in L_c^1(\mathbb{R})$, $\varphi_n' \in L_c^1(\mathbb{R})$ et que $h_n : x \mapsto x\varphi_n(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\varphi_n} = \lambda_n \varphi_n$, où λ_n est une constante à déterminer.